



MAT 2030

# CORRIGÉS DES EXERCICES D'INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE

Cours donné par le Professeur François Lalonde  
Corrigés réalisés par Paul Libbrecht, auxiliaire  
Session d'automne 1995

Cliquez sur  
un des titres

[Exercices 1](#)

[Exercices 2](#)

[Exercices 3](#)

[Exercices 4](#)

[Corrigé de l'examen 1](#)

[Exercices 5](#)

[Exercices 6](#)

[Exercices 7](#)

[Exercices 8](#)

[Exercices 9](#)

Toute plainte quant à la  
typographie et aux  
erreurs y reliées a  
raison d'être,  
s'adresser à:

[paul@math.uqam.ca](mailto:paul@math.uqam.ca)

SAUVEZ DES ARBRES !  
COMMUNIQUEZ AVEC  
L'ORDINATEUR !

# EXERCICES I CORRIGÉ

0. Montrer que tous les plans affines sont isomorphes.

Soient  $(\mathcal{P}, f)$  et  $(\mathcal{Q}, g)$  deux plans affines réels. Choisissons  $p \in \mathcal{P}$  et  $q \in \mathcal{Q}$  deux points. Alors les applications  $f_p: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f_p(x) = f(p, x)$  et  $g_q: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $g_q(y) = g(q, y)$  sont des bijections, elles admettent donc des inverses, que l'on écrira  $f_p^{-1}$  et  $g_q^{-1}$ .

Montrons que  $\varphi = g_q^{-1} \circ f_p: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  est un isomorphisme de plans affines, c'est-à-dire montrons que

$$\forall a, b \in \mathcal{P} \quad g(\varphi(a), \varphi(b)) = f(a, b) \quad \forall m, n \in \mathcal{Q} \quad f(\varphi^{-1}(m), \varphi^{-1}(n)) = g(m, n)$$

Prenons  $a, b \in \mathcal{P}$  et appelons  $r_a = f_p(a)$ ,  $r_b = f_p(b)$ , puis  $y_a = g_q^{-1}(r_a)$  et  $y_b = g_q^{-1}(r_b)$ . Ces dernières égalités sont équivalentes à  $g(q, y_a) = g_q(y_a) = r_a$  et  $g(q, y_b) = g_q(y_b) = r_b$ .

$$\begin{aligned} g(\varphi(a), \varphi(b)) &= g(g_q^{-1}(f_p(a)), g_q^{-1}(f_p(b))) = g(g_q^{-1}(r_a), g_q^{-1}(r_b)) = g(y_a, y_b) \\ &= g(y_a, q) + g(q, y_b) = g(q, y_b) - g(q, y_a) = r_b - r_a \end{aligned}$$

Par ailleurs:

$$f(a, b) = f(a, p) + f(p, b) = f(p, b) - f(p, a) = r_b - r_a$$

On donc montré que  $g(\varphi(a), \varphi(b)) = f(a, b)$  pour tout  $a, b$ . Et donc que  $\varphi$  est un morphisme. La démonstration que  $\varphi^{-1}$  est un morphisme est très similiaire: Soit  $m, n \in \mathcal{Q}$   $r_m = g_q(m)$ ,  $r_n = g_q(n)$ , puis  $x_m = f_p^{-1}(r_m)$ ,  $x_n = f_p^{-1}(r_n)$  c'est-à-dire que  $f(p, x_m) = f_p(x_m) = r_m$  et  $f(p, x_n) = f_p(x_n) = r_n$ .

On a alors:

$$f(\varphi^{-1}(m), \varphi^{-1}(n)) = f(x_m, x_n) = f(p, x_n) - f(x_m, p) = r_n - r_m$$

Alors que

$$g(m, n) = g(q, n) - g(q, m) = r_n - r_m$$

Et donc  $\varphi^{-1}$  est un morphisme de plan affine lui aussi. On a donc montré que  $\varphi = g_q^{-1} \circ f_p$  est un isomorphisme de plan affine réel.

☐

1. Soient  $A, B, C, D$  et  $E$  cinq points quelconques d'un plan affine réel. Comment définit-on le segment d'origine  $A$ , orienté, obtenu comme somme des segments orientés  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{DE}$  ?

Observons que, dans un plan affine réel  $(\mathcal{P}, f)$ , on peut construire la translation  $\tau_{AB}$  qui envoie  $A$  sur  $B$  en posant:  $\tau_{AB}(x) = f_A^{-1}(f_A(x) + f(A, B))$ . Ainsi pour obtenir le point  $F$  tel que  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ , il suffit de poser  $F = f_A^{-1}(f_B(C) + f_D(E))$  puisque:

$$\overrightarrow{AF} = f(A, F) = f_A(f_A^{-1}(f_B(C) + f_D(E))) = f_B(C) + f_D(E) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$$

2. Construire une structure de plan réel affine sur  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$ .

En posant  $f(a, b) = b - a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2$  (on fait ici la différence dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ ), on obtient une application  $f: (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Vérifions les deux conditions pour que  $(\mathbb{R}^2, f)$  soit bien un plan réel affine.

(i) Soit  $x \in \mathbb{R}^2$ , l'application  $f_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f_x(y) = y - x$  admet un inverse  $f_x^{-1}(y) = y + x$ . Vérifions que ces deux applications sont bien inverses l'une de l'autre.

$$f_x^{-1} \circ f_x(y) = f_x^{-1}(y - x) = y - x + x = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

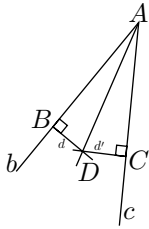
$$f_x \circ f_x^{-1}(y) = f_x(y + x) = y + x - x = y \quad \forall y \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi  $f_x \circ f_x^{-1} = f_x^{-1} \circ f_x$  est l'identité sur  $\mathbb{R}^2$ . Et donc  $f_x$  admet un inverse, i.e. est une bijection pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

(ii)  $f(x, y) = y - x = z - x + y - z = f(x, z) + f(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$

On a donc montré que  $(\mathbb{R}^2, f)$  est un plan affine réel.

3. Montrer que les perpendiculaires élevées aux deux côtés d'un angle à des distances égales du sommet se coupent sur la bissectrice de l'angle.



**Hypothèses:** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points d'un plan réel affine  $\mathcal{P}$ , tels que  $AB = AC$  et soient  $b$  la droite passant par  $A$  et  $B$ ,  $c$  la droite passant par  $A$  et  $C$ ,  $d$  la droite perpendiculaire à  $b$  passant par  $B$  et  $d'$  la droite perpendiculaire à  $c$  passant par  $C$ , appelons alors  $D$  le point d'intersection de  $d$  et  $d'$ .

**Conclusion:** Nous voulons montrer que  $D$  est sur la bissectrice de l'angle en  $BAC$ , c'est-à-dire que  $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ .

**Démonstration:** Par hypothèse  $\triangle BAC$  est isocèle en  $A$  donc  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$  or  

$$\widehat{ABC} + \widehat{CBD} = \widehat{ABD} = 1 \text{ droit} = \widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$$

donc  $\widehat{BCD} = \widehat{CBD}$ . Ainsi  $\triangle DCB$  est isocèle, i.e.  $DB = DC$ . Maintenant, par le critère Côté-Côté-Côté, on a que le triangle  $BAD$  est congruent au triangle  $CAD$ . Donc les angles  $\widehat{BAD}$  et  $\widehat{CAD}$  coïncident.  $\square$

4. Soit  $P$  un point à l'intérieur d'un triangle  $ABC$ . Montrer que:

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) < AP + BP + CP < AB + AC + BC$$

- a) Montrons d'abord que  $\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) < AP + BP + CP$ . Il nous suffira d'utiliser l'inégalité triangulaire qui nous dit que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. On considère  $\triangle APB$ , on a donc  $AB \leq AP + PB$  (et égalité si et seulement si  $P \in \overrightarrow{AB}$ ). Puis  $BC \leq BP + PC$  et  $CA \leq CP + PA$ . En sommant ces trois inégalités, on obtient:

$$AB + BC + CA \leq AP + PB + BP + PC + CP + PA = 2 \cdot AP + 2 \cdot BP + 2 \cdot CP$$

et donc  $\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) \leq AP + BP + CP$ .

Il faut noter que nous n'avons pas eu besoin du fait que  $P$  est à l'intérieur du triangle.

Nous avons prouvé l'inégalité non-strict. Reste à voir si l'égalité est possible. Dans chacune des premières inégalités, nous ne pouvions avoir égalité que si  $P$  était sur le côté du triangle. Comme  $P$  ne peut être sur les trois côtés, il résulte qu'au moins une inégalité est stricte et donc que la somme est stricte.

$$\frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA) < AP + BP + CP$$

- b) Pour prouver  $AP + BP + CP < AB + AC + BC$ , il nous faudra absolument utiliser le fait que  $P$  est dans l'intérieur du triangle, puisque sinon  $P$  pourrait s'éloigner arbitrairement de  $A, B$  et  $C$ , le côté gauche pourrait grandir arbitrairement sans que le côté droite ne bouge. Ceci serait absurde.

Dans cette deuxième partie, l'auteur n'a pas trouvé de meilleure preuve qu'en utilisant fortement l'algèbre linéaire. Dans ce cadre, que veut dire être à l'intérieur du triangle ?

Euclide avait parlé de demi-plans et avait même défini un polygone "plein" comme l'intersection de demi-plans. Il nous faut définir un demi-plan: étant donné une droite  $d$  d'un plan réel affine  $(\mathcal{P}, f)$ , on peut construire un repère de celui-ci au moyen de deux points  $O$  et  $X$  de  $d$  et d'un point  $Y$  hors de  $d$ . Tous les points  $P$  de  $\mathcal{P}$  peuvent alors être écrits avec deux coordonnées uniques  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OX} + \mu \cdot \overrightarrow{OY}$ . Deux points  $P$  et  $Q$  hors de  $d$  seront dit *dans le même demi-plan défini par  $d$*  ou *du même côté de  $d$*  si  $\mu_P$  et  $\mu_Q$  ont le même signe. On peut vérifier que la relation être du même côté de  $d$  est alors une relation d'équivalence et qu'elle revient au même que de définir que  $P$  et  $Q$  sont du même côté de  $d$  si et seulement si le segment  $\overline{PQ}$  en touche pas  $d$ . C'était là la définition originale d'Euclide.

Revenons maintenant à nos moutons; on a donc un triangle  $ABC$  que nous supposons non-dégénéré (i.e. les trois points ne sont pas sur une même droite) sinon l'intérieur a peu de sens... Le point  $P$  de notre problème est alors à l'intérieur de  $\triangle ABC$  si  $P$  et  $C$  sont du même côté de la droite  $AB$ , si  $P$  et  $B$  sont du même côté de  $AC$  et si  $P$  et  $A$  sont du même côté de  $BC$ .

Introduisons des coordonnées pour chaque repère que l'on peut construire avec ces trois points. Il existe donc six réels positifs  $\lambda_A, \mu_A, \lambda_B, \mu_B, \lambda_C$  et  $\mu_C$  tels que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \lambda_A \cdot \overrightarrow{AB} + \mu_A \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BP} = \lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} + \mu_B \cdot \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CP} = \lambda_C \cdot \overrightarrow{CA} + \mu_C \cdot \overrightarrow{CB} \end{cases} \quad \text{qui implique} \quad \begin{cases} AB \leq \lambda_A \cdot AB + \mu_A \cdot AC \\ BP \leq \lambda_B \cdot BA + \mu_B \cdot BC \\ CP \leq \lambda_C \cdot CA + \mu_C \cdot CB \end{cases}$$

Le deuxième système nous donne, en sommant, que

$$AB + BP + CP \leq (\lambda_A + \lambda_B) \cdot AB + (\mu_B + \mu_C) \cdot BC + (\mu_A + \lambda_C) \cdot CA$$

Observons que les réels ne peuvent être nuls sinon  $P$  serait sur un des côtés. Il nous suffit maintenant montrer que  $\lambda_A + \lambda_B < 1$ ,  $\mu_B + \mu_C < 1$  et  $\mu_A + \lambda_C < 1$ .

Commençons par  $\lambda_A + \lambda_B$ . Remarquons qu'en soustrayant les deux premières égalités vectorielles, on obtient :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP} = \lambda_A \cdot \overrightarrow{AB} + \mu_A \cdot \overrightarrow{AC} - \lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} - \mu_B \cdot \overrightarrow{BC} = (\lambda_A + \lambda_B) \cdot \overrightarrow{AB} + \mu_A \cdot \overrightarrow{AC} + \mu_B \cdot \overrightarrow{CB}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si  $\mu_A \cdot \overrightarrow{AC} + \mu_B \cdot \overrightarrow{CB}$  n'est pas colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ , où s'il est nul, l'égalité nous donne alors  $\lambda_A + \lambda_B = 1$  et  $\mu_A \cdot \overrightarrow{AC} + \mu_B \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0}$  i.e.  $\mu_A = \mu_B = 0$  (puisque  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont indépendants) .

- Si  $\mu_A \cdot \overrightarrow{AC} + \mu_B \cdot \overrightarrow{CB}$  est non-nul et colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ , on a alors un  $k \in \mathbb{R}^*$  tel que :

$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \mu_A \cdot \overrightarrow{AC} + \mu_B \cdot \overrightarrow{CB} = \mu_A \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\mu_B - \mu_A) \cdot \overrightarrow{CB} = \mu_A \cdot \overrightarrow{AB} + (\mu_B - \mu_A) \cdot \overrightarrow{CB}$$

qui implique (puisque  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont linéairement indépendants) que  $\mu_B = \mu_A$  et  $\mu_A = k$ , on obtient alors :

$$\overrightarrow{AB} = (\lambda_A + \lambda_B) \cdot \overrightarrow{AB} + \mu_A \cdot \overrightarrow{AB} = (\lambda_A + \lambda_B + \mu_A) \cdot \overrightarrow{AB}$$

et donc  $\lambda_A + \lambda_B + \mu_A = 1$  (puisque  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ) ainsi (puisque  $\lambda_A \geq 0$ )  $\lambda_A + \lambda_B < 1$ .

Le raisonnement pour  $\mu_B + \mu_C < 1$  est même. On a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = (\mu_B + \mu_C) \cdot \overrightarrow{BC} + \lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} + \lambda_C \cdot \overrightarrow{AC}$$

- si  $\lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} + \lambda_C \cdot \overrightarrow{AC}$  n'est pas colinéaire à  $\overrightarrow{BC}$  ou est nul alors  $\mu_B + \mu_C = 1$  et  $\lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} + \lambda_C \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Donc  $\lambda_B = \lambda_C = 0$  ce qui impliquerait que  $\overrightarrow{BP} = \mu_B \cdot \overrightarrow{BC}$  i.e. que  $P$  est sur  $BC$  .

- si  $\lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} + \lambda_C \cdot \overrightarrow{AC}$  est colinéaire et non-nul à  $\overrightarrow{BC}$  alors  $\exists k \in \mathbb{R}^*$  tel que  $k \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda_B (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\lambda_C - \lambda_B) \cdot \overrightarrow{AC}$  donc  $\lambda_C = \lambda_B$  et  $\lambda_B \cdot \overrightarrow{BA} + \lambda_C \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda_B \cdot \overrightarrow{BC}$  ainsi  $\overrightarrow{BC} = (\mu_B + \mu_C + \lambda_B) \cdot \overrightarrow{BC}$  i.e.  $\mu_B + \mu_C + \lambda_B = 1$  d'où  $\mu_B + \mu_C < 1$ .

Le raisonnement pour montrer que  $\mu_A + \lambda_C < 1$  est même. Il est laissé au lecteur. On a donc montré que  $0 < \lambda_A + \lambda_B, \mu_B + \mu_C, \mu_A + \lambda_C < 1$ . L'inégalité que nous avons obtenue comme somme des trois inégalités devient alors :

$$AP + BP + CP < AB + BC + CA$$

☞

On peut croire volontiers que tout le monde a été surpris d'une pareille difficulté. Deux conclusions s'imposent : Premièrement, accrochez-vous quand même, la démarche est une bonne synthèse de l'approche "algèbre linéaire" de la géométrie euclidienne. Deuxièmement, il conviendra de s'entendre si une telle difficulté peut être exigée lors de devoirs ou d'examens.

## 5. Montrer qu'un triangle qui a deux médianes égales est isocèle.

Cette fois, toutes les personnes qui ont essayé de résoudre ce problème à la façon d'Euclide n'ont probablement pas pu démarrer. Laissez tomber les dessins, employez deux coups de canons de l'artillerie des formes bilinéaires symétriques et vous aurez pulvérisé le problème. Voici :

**Hypothèse:** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points d'un plan réel affine,  $A'$  le milieu de côté  $\overline{AC}$  et  $C'$  le milieu du côté  $AB$ . On sait que  $CC' = BB'$ .

**Conclusion:**  $AC = AB$ .

**Démonstration:** on a  $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$  donc  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$ . De même:  $CC' = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

On sait que  $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CC'} = (CC')^2 = (BB')^2 = \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BB'}$ . Développons ces produits scalaires en utilisant la bilinéarité et la symétrie:

$$CC'^2 = \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CC'} = \left( \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left( \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \right) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$BB'^2 = \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BB'} = \left( \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left( \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Puisque ces quantités (ce sont des réels !) sont égales, on a:

$$CA^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \cdot AB^2 = BA^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4} \cdot AC^2$$

d'où  $\frac{3}{4} \cdot CA^2 - \frac{3}{4} \cdot AB^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Et donc  $CA^2 = AB^2$  ce qui implique (puisque les distances sont positives)  $CA = AB$ .

□

6. Utilisez vos connaissances de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire standard pour démontrer que le critère CAC de congruence des triangles.

L'indication "utilisez votre connaissance de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire standard" signifie ici la chose suivante: on connaît tout un ensemble de transformations  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$  qui préservent le produit scalaire et donc les distances (i.e.  $\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(b)} \cdot \overrightarrow{\varphi(c)\varphi(d)} = \overrightarrow{ab} \cdot \overrightarrow{cd}$ ) ce sont les fameuses isométries (vous devriez connaître les translations, les rotations, les symétries et le fait que ces transformations préservent le produit scalaire).

Le critère de congruence CAC (Côté-Angle-Côté) n'est rien d'autre que l'énoncé suivant:

Soient  $A, B, C$  et  $A', B', C'$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que  $AB = A'B'$ ,  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$  et  $BC = B'C'$  alors il existe une isométrie  $\varphi$  telle que  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$ , et  $\varphi(C) = C'$ .

Prouvons cette proposition: Remarquons d'abord qu'il existe une translation  $\tau$  amenant  $A'$  sur  $A$ . Puisque la longueur  $AB = A'B'$ , il existe une rotation de centre  $A$  transformant en le segment  $\overline{\tau(A')\tau(B')}$  et le segment  $\overline{AB}$ . Appelons alors  $D$  le point  $\rho \circ \tau(C)$ . En effectuant éventuellement une symétrie  $\sigma$  le long de la droite  $AB$ , on peut amener  $D$  du même côté de  $AB$  que  $C$ , s'il n'est pas nécessaire d'effectuer cette symétrie, on pose que  $\sigma$  est l'identité. On a donc trouvé une isométrie  $\sigma \circ \rho \circ \tau$  qui amène  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$ ; appelons  $E$  le point  $\sigma \circ \rho \circ \tau(C) = \sigma(D)$ . Il nous faut montrer que  $E = C$ . On sait que l'angle  $\widehat{ABC}$  est le même que  $\widehat{A'B'C'}$  et donc (puisque l'angle est exprimé par le produit scalaire) de même  $\widehat{ABE}$  donc la demi-droite  $\bullet BC$  est la même que la demi-droite  $\bullet BE$ . Or la distance de  $B$  à  $C$  est la même que la distance de  $B'$  à  $C'$  et donc de  $B$  à  $E$ . Ainsi  $E = C$  puisque ce sont les uniques points de la demi-droite  $\bullet BC$  dont la distance à  $B$  est  $BE = B'C' = BC$ .

□

# EXERCICES II CORRIGÉ

0. Prouver la réciproque du théorème des angles alternes-internes.

**Hypothèse:** Soient  $A, B, C$  et  $D$ , quatre points distincts d'un plan réel tels que  $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{CD}$ ,  $A$  et  $D$  ne sont pas du même côté de  $\overleftrightarrow{BC}$  et tels que  $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$ .

**Conclusion:**  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ .

**Démonstration:** Supposons le contraire de la conclusion, c'est-à-dire que les droites  $\overleftrightarrow{AB}$  et  $\overleftrightarrow{CD}$  se rencontrent, disons en un point  $P$ . Supposons, pour l'instant que  $A$  et  $P$  ne sont pas du même côté de  $\overleftrightarrow{BC}$  et que  $D$  est du même côté que  $P$ .

On a que  $\widehat{CBP} = 180^\circ - \widehat{CBA} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BCP}$

Ainsi, dans le triangle  $\triangle CBP$ , la somme des angles étant de  $180^\circ$ , l'angle  $\widehat{BPC}$  devrait être  $180^\circ - \widehat{BCP} - \widehat{CBP} = 0^\circ$ . Mais cela est impossible en vertu du lemme ci-dessous .

Si maintenant  $A$  et  $P$  sont du même côté de  $\overleftrightarrow{BC}$  alors que  $D$  et  $P$  ne le sont pas, il suffit d'invertir dans la preuve  $A$  avec  $D$  et  $C$  avec  $B$ , ce qui, puisque deux angles opposés par le sommet sont égaux, ne change ni les droites ni les angles utilisés, on a donc le même résultat.

∩

**Lemme** Dans un plan, si deux droites se coupent avec un angle nul, elles sont égales.

**Démonstration:** Soient  $d$  et  $e$  les deux droites et  $P$  leur point d'intersection. Choisissons deux points  $Q \in d$  et  $R \in e$  tels que  $PQ = 1 = PR$ . Nous voulons prouver que si l'angle est nul alors les vecteurs  $\overrightarrow{PQ}$  et  $\overrightarrow{PR}$  sont colinéaires. Exprimons ces vecteurs dans une base quelconque :

On a  $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  et, puisqu'ils sont de longueur 1,  $\begin{cases} 1 = a^2 + b^2 \\ 1 = c^2 + d^2 \end{cases}$

L'angle s'exprime comme:  $\widehat{QPR} = \text{Arc cos } \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{PQ \cdot PR} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = a \cdot c + b \cdot d$

Puisque cet angle est nul, on doit avoir  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 1$ , i.e.  $a \cdot c = 1 - b \cdot d$ . En mettant au carré cette équation, cela donne  $a^2 \cdot c^2 = 1 - 2 \cdot b \cdot d + b^2 \cdot d^2$  Mais le fait que les vecteurs soient de longueur 1, nous permet de substituer  $a^2$  par  $1 - b^2$  et  $c^2$  par  $1 - d^2$ . On obtient :

$$1 - 2 \cdot b \cdot d + b^2 \cdot d^2 = (1 - b^2) \cdot (1 - d^2) = 1 + b^2 \cdot d^2 - b^2 - d^2$$

autrement dit  $-2 \cdot b \cdot d = -b^2 - d^2$  id est  $0 = b^2 - 2 \cdot b \cdot d - d^2 = (b - d)^2$

On conclut que  $b$  et  $d$  doivent être égaux. Ce qui signifie que  $1 - a^2 = 1 - c^2$  et donc  $a = \pm c$  On a donc :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm c \\ d \end{pmatrix}$$

Remarquons alors que si  $a = -c$  et  $b = d$ , le produit scalaire donne  $a \cdot b + b \cdot d = a \cdot b - a \cdot b = 0$  . Ainsi on a égalité des vecteurs directeurs et donc les deux droites sont égales.

1. Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux droites parallèles, distinctes. Soient  $A_1$  et  $B_1$  deux points distincts de  $d_1$  et  $A_2$  et  $B_2$  deux points distincts de  $d_2$  tels que les segments  $\overline{A_1A_2}$  et  $\overline{B_1B_2}$  soient disjoints. Montrer que  $A_1B_1 = A_2B_2$  si et seulement si les segments  $\overline{A_1A_2}$  et  $\overline{B_1B_2}$  sont parallèles.

**SI:** Si les segments sont parallèles alors le quadrilatère  $A_1A_2B_2B_1$  est un parallélogramme et donc, on l'a vu dans le cours,  $A_1B_1 = A_2B_2$ .

**SEULEMENT SI:** Si  $A_1B_1 = A_2B_2$ . on a, puisque les droites  $\overleftrightarrow{A_1B_1}$  et  $\overleftrightarrow{A_2B_2}$  sont parallèles, que  $\overrightarrow{A_1B_1} = \pm A_2B_2$  (il ne pourrait pas y avoir d'autre facteur sinon les longueurs ne serait pas égales. Séparons les deux cas:

+ Si  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$  alors:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$$

Et donc,  $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1B_2}$ .

- Si  $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{A_2B_2}$ , montrons que les segments  $\overline{A_1A_2}$  et  $\overline{B_1B_2}$  se rencontrent, i.e. qu'il existe  $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$  tels que  $\lambda \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \mu \cdot \overrightarrow{B_1B_2}$ . En effet, on a  $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2A_2}$ .

Or  $\overrightarrow{B_2A_2} = -\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_1B_1}$  donc  $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{A_1B_1} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2}$ . Ainsi  $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B_1B_2}$  et donc les segments  $\overline{A_1A_2}$  et  $\overline{B_1B_2}$  se coupent en leurs milieux .

2. Donner une preuve vectorielle du théorème affirmant que les trois médianes d'un triangle concourent au centre de gravité du triangle.

Le centre de gravité d'un ensemble de  $m$  points  $A_1, \dots, A_m$  d'un plan est défini comme le point  $P$  tel que:

$$\overrightarrow{A_1P} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=2}^m \overrightarrow{A_1A_i}$$

Ce qui revient au même de poser, pour un point  $O$ :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \overrightarrow{OA_i}$$

Soit  $\triangle ABC$  un triangle du plan.

$$\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Les milieux des segments  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont définis comme:

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$$

On veut montrer qu'il existe un point  $P$  sur les trois médianes, ceci est équivalent à l'existence d'un point  $P$  du plan et de trois réels  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  tels que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \lambda \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ \overrightarrow{BP} = \mu \cdot (\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{CP} = \nu \cdot (\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}) \end{cases}$$

En soustrayant la 3<sup>me</sup> ligne à la 1<sup>re</sup>, on obtient:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \mu \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \overrightarrow{AC} - \nu \cdot \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot \overrightarrow{AB} = (\mu + \frac{1}{2} \cdot \nu) \cdot \overrightarrow{BA} + (\nu + \frac{1}{2} \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (\mu + \frac{1}{2} \cdot \nu) \cdot \overrightarrow{BA} + (\nu + \frac{1}{2} \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{AB} + (\nu + \frac{1}{2} \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot (\mu - \nu) \cdot \overrightarrow{BA} + (\mu + \frac{1}{2} \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont linéairement indépendants (on suppose toujours un triangle non-dégénéré), on a  $\frac{1}{2} \cdot (\mu - \nu) = 0$  et  $\nu + \frac{1}{2} \cdot \mu = 1$  ce qui revient à  $\mu = \nu$  et  $\mu + \frac{1}{2} \cdot \mu = \frac{3}{2} \cdot \mu = 1$ . Donc  $\mu = \nu = \frac{2}{3}$ .

On vient donc de montrer que si  $P$  appartenait à  $\overleftrightarrow{BB'}$  et  $\overleftrightarrow{CC'}$ , il serait au deux tiers de chaque segment  $\overline{BB'}$  et  $\overline{CC'}$ . On a alors que:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Et donc notre  $P$  est bien le centre de gravité.

Au vu de tout la symétrie qui tourne ici autour, il semblerait qu'il pourrait y avoir des chances que  $\lambda = \frac{2}{3}$  aussi. Tentons notre chance, cela ne coutera pas trop cher, calculons

$$\frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$

qui est bien le point  $P$  désigné comme centre de gravité. En résumé nous avons montré que  $\overleftrightarrow{BB'}$  et  $\overleftrightarrow{CC'}$  se coupaient sur le centre de gravité et que celui-ci appartenait à  $\overleftrightarrow{AA'}$ . Donc ce centre de gravité appartient bien à ces trois droites. De plus c'est l'unique point d'intersection de celles-ci puisqu'elles sont distinctes deux-à-deux et ne peuvent donc n'avoir qu'un point d'intersection deux-à-deux.

∩

3. Sur la base  $\overline{BC}$  d'un triangle isocèle  $ABC$  et par un point quelconque  $P$  de  $BC$ , on élève une perpendiculaire  $p$ . En posant  $M = \overleftrightarrow{BA} \cap p$  et  $N = \overleftrightarrow{CA} \cap p$ , montrer que  $PM + PN$  est constante.

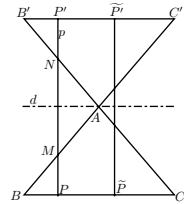
Appelons  $\sigma$  la symétrie autour de la droite  $d$  parallèle à  $\overline{BC}$  passant par  $A$ . Et posons  $A' = \sigma(A)$ ,  $B' = \sigma(B)$  et  $P' = \sigma(P)$ ; on a clairement  $\sigma(A) = A$ .

Montrons que  $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB'}$ . Pour cela observons que  $\sigma$  envoie une droite coupant  $d$  en une droite qui coupe  $d$  au même point avec le même angle mais de l'autre côté (si vous n'êtes pas convaincu, vérifiez-le vectoriellement: en choisissant  $A$  comme point d'origine, un vecteur de  $d$  comme premier repère et un vecteur perpendiculaire à  $d$  comme second repère, votre symétrie s'exprime alors comme  $\sigma(x, y) = (x, -y)$ ). De plus, on sait que  $\sigma$  est une involution, c'est-à-dire que si l'on applique deux fois  $\sigma$ , l'on retombe sur l'identité. On a donc  $\widehat{BA'd} = \widehat{dAB'}$ ; mais  $\widehat{BA'd} = \widehat{ABC}$  (alternes-internes).

Ainsi  $\widehat{B'AC} = \widehat{B'Ad} + \widehat{dAB} + \widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC}$  qui est, puisque  $\triangle ABC$  est isocèle,  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BCA}$ , la somme des angles du triangles  $\triangle ABC$ , donc un angle plat. Ainsi  $\sigma(\overleftrightarrow{BA}) = \overleftrightarrow{B'A} = \overleftrightarrow{AC}$  et donc  $C'A = \sigma(\overleftrightarrow{AC}) = \sigma \circ \sigma(\overleftrightarrow{BA}) = \overleftrightarrow{BA}$ .

De plus on a  $\sigma(p) = p$  puisque  $p$  est perpendiculaire à  $d$ . Alors  $\sigma(M) = \sigma(\overleftrightarrow{BA} \cap p) = \sigma(\overleftrightarrow{BA}) \cap \sigma(p)$  puisque  $\sigma$  est une bijection, donc est  $\overleftrightarrow{AC} \cap p = N$ . On obtient, puisque  $\sigma$  est une isométrie, que  $P'N = PM$  et on a donc que  $PM + PN = PN + P'N = PP'$  puisque ces deux segments ne s'intersectent pas et sont sur la même droite et ont une extrémité en commun.

Il nous reste maintenant à prouver que  $PP'$  est constante. Pour cela, il suffit d'observer que si l'on a un autre  $\tilde{P}$  dans  $\overline{BC}$ , le segment  $\overline{\tilde{P}P'}$  est parallèle à  $p$  donc le quadrilatère  $PP'\tilde{P}\tilde{P}$  est un parallélogramme et donc  $PP' = \tilde{P}\tilde{P}$ .

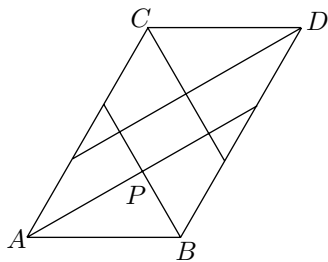


∩

4. Montrer que les bissectrices intérieures d'un parallélogramme forment un rectangle.

On sait que la somme des angles d'un triangle est de  $180^\circ$  donc la somme des angles d'un quadrilatère (plus précisément d'un quadrilatère convexe, c'est-à-dire d'un quadrilatère qui a un intérieur)  $ABCD$  est, en le séparant en deux triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle ACD$ :

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} &= \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{ACD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAC} + \widehat{CAB} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} + \widehat{ACD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAC} = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$



Le but de cet exercice est donc de montrer que le quadrilatère dont les sommets sont les quatre intersections des bissectrices entre elles est un rectangle. Il nous faut donc montrer que l'angle en chacun de ces sommets est un angle droit. Nous nous contenterons de faire la preuve pour l'un d'eux, la preuve pour les autres étant très, très semblable.

Appelons  $P$  le point d'intersection de la bissectrice partant de  $A$  et de la bissectrice partant de  $B$ . On a que  $\widehat{PAB} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DAB}$  et  $\widehat{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ABC}$ . On sait que dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux ainsi on a :

$$360^\circ = \widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = 2 \cdot \widehat{DAB} + 2 \cdot \widehat{ABC}$$

$$\text{Ainsi } \widehat{PAB} + \widehat{ABP} = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{DAB} + \widehat{ABC}) = \frac{1}{2} (2 \cdot \widehat{DAB} + 2 \cdot \widehat{ABC}) = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ.$$



D'où  $\widehat{APB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ .

∩

5. Montrer que si l'on joint les deux sommets opposés d'un parallélogramme au point milieu des deux côtés opposés, une des diagonales est alors divisée en trois parties égales.

**Hypothèse:**  $ABCD$  un parallélogramme,  $F$  milieu de  $\overline{DC}$ ,  $E$  milieu de  $AB$ ,  $P = \overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AC}$  et  $Q = \overleftrightarrow{BF} \cap \overleftrightarrow{AC}$ .

**Conclusion:**  $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QC}$ .

**Démonstration:** Les droites  $\overleftrightarrow{AC}$  et  $\overleftrightarrow{ED}$  se croisent si et seulement s'il existe de réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\overrightarrow{AE} + \lambda \cdot \overrightarrow{ED} = \mu \cdot \overrightarrow{AC}$ . Développons cela, en:

$$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = \mu(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \mu(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot (\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}) = \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AD}$$

Et donc:

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \lambda - \mu) \cdot \overrightarrow{AB} + (\lambda - \mu) \cdot \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

La linéaire indépendance de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  nous donne alors  $\lambda = \mu$  et  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \lambda - \mu = 1$  ce qui revient à  $\mu = \frac{1}{3}$  et  $\lambda = \frac{1}{3}$ . On obtient ainsi que le point  $P$  défini par  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ED} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$  est l'unique point d'intersection de  $\overleftrightarrow{AC}$  et  $\overleftrightarrow{ED}$ .

En intervertissant ensuite les lettres de la manière  $A \leftrightarrow C$ ,  $B \leftrightarrow D$ ,  $E \leftrightarrow F$  et  $P \leftrightarrow Q$ , on prouve de la même manière que  $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA}$ . On a donc deux points  $P$  et  $Q$  sur  $\overleftrightarrow{AC}$  tels que:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$

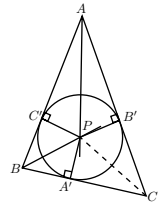
On a ainsi  $\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QC} = \frac{1}{3} \cdot \overleftrightarrow{AC}$ .

∩

# EXERCICES III CORRIGÉ

1. Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle concourent en un point qui est le centre du cercle inscrit.

Rappelons qu'on appelle distance d'un point à une droite, la distance de ce point à sa projection orthogonale sur la droite, cette définition, on peut le vérifier aisément à l'aide du théorème de Pythagore que vous prouvez plus bas, est équivalente à dire que c'est la distance du point au point de la droite le plus proche. Puisque la notion de cercle inscrit n'a pas été définie, nous nous contenterons de dire qu'un point est le centre du cercle inscrit d'un polygone convexe s'il est à l'intérieur du polygone et si sa distance à chaque côté est la même; ceux qui savent ce qu'est un cercle et une tangente verront aisément que cela est équivalent à dire que le cercle est tangent à chaque côté.



Rappelons également que la bissectrice intérieure d'un triangle  $\triangle ABC$  issue de  $A$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$ , c'est-à-dire une droite passant par  $A$  telle que, si l'on appelle  $P$  un point de cette bissectrice,  $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$ . Remarquons alors qu'alors  $B$  et  $C$  ne sont pas du même côté de cette bissectrice puisque  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$ .

**Hypothèses:** soient  $\triangle ABC$  un triangle,  $a$  la bissectrice intérieure de celui-ci issue de  $A$ ,  $b$  la bissectrice intérieure issue de  $B$  et  $c$  la bissectrice intérieure issue de  $C$ .

**Conclusion:** il existe un point  $P$  appartenant aux trois bissectrices. Et :

$$d(P, \overrightarrow{AB}) = d(P, \overrightarrow{AC}) = d(P, \overrightarrow{BC})$$

**Démonstration:** Montrons que  $a \not\parallel c$ . Si c'était le cas, on aurait un demi-plan de  $a$  ainsi que la droite  $a$  qui seraient inclus dans un demi-plan de  $c$  et donc un demi-plan de  $c$  ainsi que la droite  $c$  devraient être dans un demi-plan de  $a$  (comme on peut le vérifier vectoriellement). Mais  $B$  devrait alors dans le demi-plan de  $a$  qui ne contient pas  $C$  et  $c$  et dans le demi-plan de  $c$  qui ne contient pas  $a$  ni  $A$ , ces deux parties étant disjointes, la situation est impossible. Donc  $a$  et  $c$  ne sont pas parallèles, disons qu'elles se coupent en un point  $P$ .

Appelons  $B'$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $\overrightarrow{AC}$ ,  $A'$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $\overrightarrow{BC}$  et  $C'$  celle sur  $\overrightarrow{AB}$ . Remarquons alors que les  $\triangle APB'$  et  $\triangle APC'$  ont un côté en commun,  $AP$ , une paire d'angles égaux  $\widehat{PAB'} = \widehat{PAC'}$  et que:  $\widehat{APC'} = 90^\circ - \widehat{PAC'} = 90^\circ - \widehat{PAB'} = \widehat{APB'}$ . Ainsi le critère Angle-Côté-Angle de congruence des triangles s'établit; on a donc  $PC' = PB'$ . On fait le même raisonnement (faites-le !) pour montrer que  $\triangle CPB' = \triangle CPA'$  et donc que  $PB' = PA'$ . On a donc trouvé que  $P$  satisfait à :

$$d(P, \overrightarrow{AB}) = d(P, \overrightarrow{AC}) = d(P, \overrightarrow{BC})$$

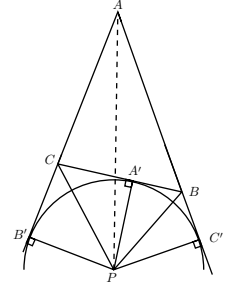
Ce qui montre que  $P$  est le centre du cercle inscrit au triangle  $\triangle ABC$ . Il nous reste à montrer que  $P$  est sur la bissectrice  $b$ . En vertu de l'égalité  $PC' = PB'$  et du fait que les triangles  $\triangle PBC'$  et  $\triangle PBA'$  ont un côté commun, ils sont congruents et donc  $\widehat{C'BP} = \widehat{A'BP}$ , autrement dit  $\overrightarrow{BP}$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$  donc est la bissectrice  $b$ . □

2. Montrer que dans un triangle, deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure concourent en un point qui est le centre de l'un des trois cercles exinscrits.

**Hypothèse:** Soient  $\triangle ABC$  un triangle,  $a$  la bissectrice intérieure issue de  $A$ ,  $b$  la bissectrice extérieure issue de  $B$  et  $c$  la bissectrice extérieure issue de  $C$ .

**Conclusion:** il existe un point  $P$  sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  et tel que :

$$d(P, \overleftrightarrow{AC}) = d(P, \overleftrightarrow{BC}) = d(P, \overleftrightarrow{AB})$$



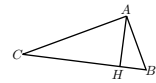
**Démonstration:** Observons d'abord que  $b$  et  $c$  ne sont pas parallèles. Sinon, on aurait un point  $Q$  sur  $b$  et  $R$  sur  $c$ , tous deux du même côté de  $\overleftrightarrow{BC}$  tel que  $\widehat{QBR} = 180^\circ - \widehat{RCB}$ . En appelant  $X$  un point de  $\overleftrightarrow{AB}$  et  $Y$  un point de  $\overleftrightarrow{AC}$  tous deux de l'autre côté de  $\overleftrightarrow{BC}$  que  $A$ , on aurait, puisque bissectrice extérieure,  $\widehat{XBC} = 2 \cdot \widehat{QBC}$  et  $\widehat{YCB} = 2 \cdot \widehat{RCB}$ . Mais  $\widehat{XBC} = 180^\circ - \widehat{ABC}$  et  $\widehat{YCB} = 180^\circ - \widehat{ACB}$  et donc :

$$180^\circ - \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{XBC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{QBC} = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \widehat{RCB} = 90^\circ - \widehat{YCB} = 90^\circ - 180^\circ + \widehat{ACB}$$

Autrement dit,  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 270^\circ$  .

Ainsi on peut poser  $P = b \cap c$ . Et, comme précédemment, on pose  $A' = pr_{\perp}(P, \overleftrightarrow{BC})$ ,  $B' = pr_{\perp}(P, \overleftrightarrow{AC})$  et  $C' = pr_{\perp}(P, \overleftrightarrow{AB})$  les projections orthogonales de  $P$ . On a alors  $PA = PA$  et  $\widehat{PCB} = \widehat{PCB'} = \widehat{PCA'}$  ainsi les deux triangles rectangles  $\triangle PCB'$  et  $\triangle PCA'$  sont congruents donc  $PA' = PB'$ . De même  $PB = PB$  et  $\widehat{PBC'} = \widehat{PBA'}$  ainsi  $\triangle PBC'$  et  $\triangle PBA'$  sont congruents donc  $PC' = PA' = PB'$ , d'où  $P$  est le centre d'un cercle tangent aux trois droites supports des côtés, or  $P$  est à l'extérieur de  $\triangle ABC$  puisque les deux bissectrices extérieures le sont, donc  $P$  est le centre d'un cercle exinscrit. Alors  $\triangle APC'$  et  $\triangle APB'$  ont deux paires de côtés égaux, et sont donc congruents ainsi  $\widehat{C'AP} = \widehat{B'AP}$  donc  $\overleftrightarrow{AP}$  est la bissectrice intérieure de  $\triangle ABC$  passant par  $A$ . Q

- 3.a) **Théorème d'Euclide** Montrer que dans un triangle  $\triangle ABC$  rectangle en  $A$  chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la projection orthogonale sur l'hypothénuse et l'hypothénuse elle même.



**Hypothèse:** soit  $\triangle ABC$  un triangle rectangle en  $A$ ,  $H$  la projection de  $A$  sur  $\overleftrightarrow{BC}$ .

**Conclusion:**  $AB^2 = BH \cdot BC$ .

**Démonstration:** Observons que  $\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$  et donc (triangle rectangle) que  $\widehat{HAB} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{CBA} = \widehat{ACB}$ . Ainsi  $\triangle AHB$  et  $\triangle CAB$  sont semblables ainsi :

$$\frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$$

Autrement dit  $AB^2 = BC \cdot BH$ . Q

- 3.b) Montrer que dans un triangle  $\triangle ABC$  rectangle en  $A$  la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypothénuse.

**Hypothèses:** Mêmes hypothèses.

**Conclusion:**  $AH^2 = CH \cdot BH$ .

**Démonstration:** On a  $\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{CAH} = \widehat{ACH}$  et donc (triangle rectangle, les deux autres angles sont aussi égaux),  $\triangle AHB \sim \triangle CHA$  d'où :

$$\frac{HB}{AH} = \frac{HA}{CH}$$

Ce qui est équivalent à  $AH^2 = CH \cdot BH$ . Q

- 3.b) **Théorème de Pythagore:**  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

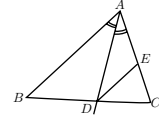
**Hypothèses:** Mêmes hypothèses.

**Conclusion:**  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

**Démonstration:** Reprenons le théorème d'Euclide, il nous dit que  $AB^2 = BH \cdot BC$ . En échangeant  $B$  et  $C$ , on obtient que  $AC^2 = CH \cdot BC$ . Remarquons que, puisque  $C$  et  $B$  sont des deux côtés de  $H$  sur la droite  $\overleftrightarrow{BC}$ , on a donc  $BH + CH = BC$ . En sommant, on obtient.

$$AC^2 + AB^2 = BH \cdot BC + CH \cdot BC = (BH + CH) \cdot BC = BC^2 \quad \square$$

4. Dans un triangle  $\triangle ABC$ , montrer que la bissectrice intérieure ou extérieure d'un angle divise le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents. En déduire que sur la droite  $\overleftrightarrow{BC}$ , les points  $D$  et  $D'$  ainsi obtenus sont tels que:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

**Hypothèse:** Soit  $\triangle ABC$  un triangle et  $a$  la bissectrice issue de  $A$ , appelons  $D = a \cap \overleftrightarrow{BC}$ .

**Conclusion:**  $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

**Démonstration:** On note que l'existence de  $D$  est assurée par le fait que  $B$  et  $C$  ne sont pas du même côté de  $a$  et donc, d'après la définition d'Euclide de demi-plan,  $D$  est même sur le segment  $\overline{BC}$ . Appelons  $d$  la droite parallèle à  $\overleftrightarrow{AB}$  passant par  $D$ . Celle-ci rencontre  $\overleftrightarrow{AC}$  sinon  $d \parallel \overleftrightarrow{AC}$  et donc  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ . Nommons donc  $E = d \cap \overleftrightarrow{AC}$ .

Puisque  $d \parallel \overleftrightarrow{AB}$ , on a (alternes internes puisque  $E$  et  $C$  sont du même côté que  $a$  donc  $E$  et  $B$  ne sont pas du même côté de  $a$ )  $\widehat{EDA} = \widehat{BAD}$ . Or, bissectrice,  $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{DAE}$ . Donc  $\triangle EDA$  est isocèle en  $A$ ; ainsi  $ED = EA$ . Maintenant,  $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$  et  $A$  et  $E$  sont du même côté de  $\overleftrightarrow{BC}$  donc  $\widehat{EDC} = \widehat{ABC}$ . Aussi  $\widehat{DCE} = \widehat{BCA}$ . D'où  $\triangle CDE \sim \triangle CBA$ . Alors:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{donc} \quad \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

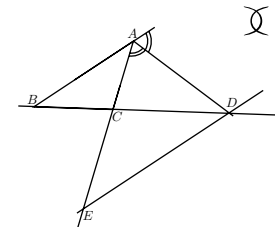
Mais (théorème de Thalès, puisque  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ ) on a  $\frac{EA}{EC} = \frac{DB}{DC}$ . On a donc montré que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

**Hypothèses:** Soit  $\triangle ABC$  un triangle et  $a$  la bissectrice extérieure issue de  $A$ ; Supposons que  $a \parallel \overleftrightarrow{BC}$  et appelons  $D = a \cap \overleftrightarrow{BC}$ .

**Conclusion:**  $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

**Note:** nous devons ajouter la supposition car la situation  $a \parallel \overleftrightarrow{BC}$  est réaliste; on le voit dans le cas d'un triangle isocèle en  $A$ .



**Démonstration:** Construisons  $d$  droite passant par  $D$  et parallèle à  $\overleftrightarrow{AB}$ . Alors  $d \parallel \overleftrightarrow{AC}$ , sinon on aurait  $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ . Appelons alors  $E$  le point d'intersection de ces deux droites. On a clairement  $\triangle CED \sim \triangle CAB$  puisque ces deux triangles ont deux angles opposés par le sommet et deux côtés parallèles (la similitude est donnée par une homothétie de centre  $C$  et de rapport  $-\frac{EC}{CA}$ ). Soit  $P$  un point de  $a$  de l'autre côté de  $A$  que  $D$ . La définition de bissectrice extérieure est alors que  $\widehat{PAD} = \widehat{EAD}$ . Or (correspondants)  $\widehat{PAB} = \widehat{ADE}$ . Ainsi  $\widehat{ADE} = \widehat{EAD}$ . Donc  $\triangle EAD$  est isocèle en  $E$  et donc  $EA = ED$ . De la similitude  $\triangle CED \sim \triangle CAB$ , on tire  $\frac{ED}{EC} = \frac{AB}{AC}$  qui devient alors  $\frac{EA}{EC} = \frac{AB}{AC}$ . On peut alors appliquer Thalès à nouveau pour obtenir que  $\frac{EA}{EC} = \frac{DB}{DC}$ . On a donc prouvé que:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad \square$$

Il vient alors, de manière évidente:

**Corollaire** Si  $A, B, C$  sont trois points distincts,  $D$  l'intersection de la bissectrice intérieure de  $\triangle ABC$  issue de  $A$  avec  $\overleftrightarrow{BC}$  et  $D'$  l'intersection de la bissectrice extérieure en  $A$  avec  $\overleftrightarrow{BC}$  existent tous deux alors:

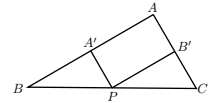
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD'}{CD'}$$

# EXERCICES IV CORRIGÉ

1. Soit  $\triangle ABC$  un triangle rectangle en  $A$ . Montrer que le cercle circonscrit à  $\triangle ABC$  admet  $\overline{BC}$  comme diamètre.

**Démonstration:** Un diamètre est une corde qui passe par le centre du cercle. Montrons donc que le centre du cercle est sur  $\overline{BC}$ . On sait que le centre du cercle circonscrit est l'intersection des trois médiatrices des côtés. Appelons  $B'$  le milieu de  $\overline{AC}$ ,  $C'$  le milieu de  $\overline{AB}$  et  $P$  l'intersection des médiatrices, i.e. des perpendiculaires à  $\overline{AC}$  par  $A'$  et à  $\overline{AB}$  par  $B'$ .

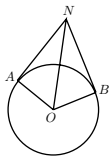
Observons alors que  $\overline{B'P} \perp \overline{AC}$  qui, lui-même est  $\perp \overline{AC}$ . Mais  $B' \notin \overline{AB}$  sinon (milieu)  $A = B' = C$ . Donc  $\overline{B'P} \parallel \overline{AB} = \overline{A'C}$ . De même, on a  $\overline{PC'} \perp \overline{AB} \perp \overline{AC}$  et  $C' \notin \overline{AC}$  donc  $\overline{C'P} \parallel \overline{AB} = \overline{AC}$ . Ainsi, le quadrilatère  $AB'PC'$  est un parallélogramme rectangle. Donc  $\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \overline{AB'} = \overline{C'P}$  et  $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{AC'} = \overline{B'P}$  de plus  $\widehat{CB'P} = 90^\circ = \widehat{CAB}$  et donc  $\widehat{B'CP} = \widehat{ACB}$  donc  $\triangle ABC \in \triangle B'PC'$  d'où  $\overline{CP} = \overline{CB}$  ou alors  $\overline{CP}$  est de l'autre côté de  $\overline{AC}$  que  $B$ . Mais cela est impossible puisque  $C'$  est du même côté de  $\overline{AC}$  que  $B$  et on aurait que  $\overline{PC'}$  coupe  $\overline{AC}$  puisque  $\overline{C'P} \parallel \overline{AC}$ . On a donc bien  $\overline{CP} = \overline{CB}$  ce qui prouve que  $P \in \overline{BC}$  et donc que  $P \in \overline{BC}$  puisque  $P$  est aussi sur la médiatrice de  $\overline{BC}$  qui ne coupe la droite  $\overline{BC}$  qu'en son point milieu.



Q.E.D.

2. **Théorème de l'angle pivotant:** Soient  $a$ ,  $b$  et  $t$  trois tangentes distinctes à un même cercle dont on note respectivement  $A$ ,  $B$  et  $T$  les points de contact avec le cercle. Supposons que  $\widehat{AOT} + \widehat{TOB} = \widehat{AOB}$ , ce qui signifie que l'arc  $ATB$  ne fait pas plus d'un demi-tour et supposons que  $t$  coupe  $a$  et  $b$  en  $M$  et  $N$  respectivement. Montrer que  $\widehat{MON} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB}$ .

Il convient d'abord de démontrer un petit lemme tranquille que voici:

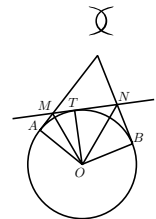


**Lemme:** Soient  $a$  et  $b$  deux tangentes à un cercle de centre  $O$ , appelons  $A$  et  $B$  les points de contact des tangentes et, en supposant qu'elle ne sont pas parallèles,  $N$  l'intersection de  $A$  et  $B$  alors  $\widehat{AON} = \widehat{BON}$ .

**Démonstration:** D'abord  $NO = NO$  donc les hypoténuses des triangles rectangles  $\triangle AND$  et  $\triangle BND$  sont égales. De plus (cercle)  $AO = BO$  donc  $NB^2 = NO^2 - BO^2 = NO^2 - AO^2 = NA^2$ . Donc  $\triangle NOB \cong \triangle NDA$  et donc  $\widehat{AON} = \widehat{BON}$ .

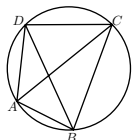
Pour prouver l'exercice, il suffit alors de remarquer que  $T$  est, sur la droite  $t$ , entre  $M$  et  $N$ , puisque  $A$  et  $B$  ne sont pas du même côté de  $\overline{OT}$  d'où  $M$  et  $N$  ne sont pas du même côté de  $\overline{OT}$  et donc  $T \in \overline{MN}$ . Il nous reste à calculer:

$$\widehat{MON} = \widehat{MOT} + \widehat{NOT} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOT} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{BOT} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOB}$$



Q.E.D.

3. Quatre points du plan sont dits cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle. Montrer que quatre points sont cocycliques si et seulement si les angles opposés du quadrilatère qu'ils déterminent sont supplémentaires.



**Hypothèse:**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont sur un même cercle.

**Conclusion:**  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC}$

**Démonstration:** On sait que deux angles dont les sommets sont sur un cercle qui interceptent une même corde du cercle et ont leur sommet du même côté que cette corde sont égaux. On a ainsi que:

$$\begin{aligned}
360^\circ &= \widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} + \widehat{ABD} + \widehat{DBC} + \widehat{BCA} + \widehat{ACD} + \widehat{CDB} + \widehat{BDA} \\
&= \widehat{DAC} + \widehat{CAB} + \widehat{ACD} + \widehat{DAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ACD} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} \\
&= 2 \cdot (\widehat{DAC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} + \widehat{ACD}) = 2 \cdot (\widehat{DAB} + \widehat{DCB})
\end{aligned}$$

Ainsi  $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$ . En changeant les noms des sommets, on montre de même que les angles en  $D$  et en  $B$  sont supplémentaires.

☺

Remarquez que nous avons même montré ici que si deux angles interceptent une même corde mais que leurs sommets ne sont pas du même côté de la corde alors ils sont supplémentaires.

**Hypothèses:** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points non-alignés trois par trois tels que  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC}$ .  
**Conclusion:** il existe un cercle passant par les quatre points.

**Démonstration:** Soit  $\gamma$  le cercle passant par  $A, B$  et  $C$  et  $\varepsilon$  le cercle passant par  $A, D$  et  $C$ . Soient  $m$  la médiatrice de  $\overline{AC}$ ,  $G$  et  $E$  les intersections de  $m$  avec  $\gamma$  et avec  $\varepsilon$  du même côté de  $AC$  que  $D$ . Puisque  $E$  et  $G$  sont sur  $m$ , les triangles  $\triangle AGC$  et  $\triangle AEC$  sont isocèles, ont la même base et sont du même côté de celle-ci. Montrons qu'ils ont même angle au sommet:  $\widehat{AGC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{AEC}$ . Ainsi ces deux triangles sont superposés, ce qui implique que  $E = G \in \delta$  or  $E \in \varepsilon$  et  $A, C$  et  $E$  sont trois points distincts par lesquels passent  $\varepsilon$  et  $\delta$  donc  $\delta = \varepsilon$  et donc  $D \in \varepsilon = \delta$ .

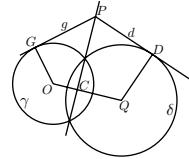
☺

4. Si  $\gamma$  et  $\delta$  sont deux cercles tangents, l'axe radical est la tangente commune. S'ils sont sécants, c'est la corde commune. Montrer que l'axe radical de deux cercles est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux cercles des segments tangents de longueurs égales

**Hypothèse:** Soient  $\gamma$  et  $\delta$  deux cercles sécants ou tangents de centres distincts  $O$  et  $Q$ ,  $m$  leur axe radical,  $P$  un point de  $m$  hors de l'intérieur des cercles,  $g$  et  $d$  des tangentes à  $\gamma$  et  $\delta$  passant par  $P$  et  $\{G\} = \gamma \cap g$ ,  $\{D\} = \delta \cap d$ .

**Conclusion:**  $PG = PD$ .

**Démonstration:** Puisque  $g \perp \theta G$ , on a  $OP^2 = OG^2 + PG^2$ ; de même  $d \perp QD \implies QP^2 = QD^2 + PD^2$ . Observons, de plus, que  $\gamma$  et  $\delta$  sont invariants par la symétrie d'axe  $\theta Q$ , ainsi la corde commune l'est également puisque la symétrie enverra corde sur corde. Alors celle-ci est soit dans  $\theta Q$  (mais dans ce cas, elle serait diamètre commun auquel cas les deux cercles seraient confondus), soit perpendiculaire à  $\theta Q$ .



Appelons alors  $C$  l'unique point d'intersection de  $m$  avec  $\theta Q$  et  $Z$  une des extrémités de la corde; on a alors

$$OC^2 - QC^2 = OZ^2 + CZ^2 - QZ^2 - CZ^2 = OG^2 - QD^2$$

Puisque  $P \in m$ , on a également  $PO^2 = OC^2 + PC^2$  et  $PQ^2 = QC^2 + PC^2$ . On a alors  $PG = PD$  si et seulement si  $PG^2 - PD^2 = 0$ . Or:

$$\begin{aligned}
PG^2 - PD^2 &= OP^2 - OG^2 - (QP^2 - QD^2) = OP^2 - QP^2 - (OG^2 - QD^2) \\
&= OC^2 + PC^2 - QC^2 - PC^2 - (OG^2 - QD^2) = (OC^2 - QC^2) - (OG^2 - QD^2)
\end{aligned}$$

Et donc, puisque  $OC^2 - QC^2 = OG^2 - QD^2$ , on obtient que  $PG^2 - PD^2 = 0$  i.e.  $PG = PD$ .

☺

**Hypothèses:** Soient  $\gamma$  et  $\delta$  deux cercles sécants ou tangents de centres distincts  $O$  et  $Q$ ,  $m$  leur axe radical,  $P$  un point quelconque hors de l'intérieur des cercles,  $g$  et  $d$  des tangentes à  $\gamma$  et  $\delta$  passant par  $P$  et  $\{G\} = \gamma \cap g$ ,  $\{D\} = \delta \cap d$  en sorte que  $PG = PD$ .

**Conclusion:**  $P \in m$ .

**Démonstration:** Gardons les appellations de la dernière preuve et introduisons le point  $B$ , projection orthogonale de  $P$  sur  $\theta Q$ . Nous voulons montrer que  $B = C$ . Puisque  $PG = PD$ , on a

$$PO^2 - PQ^2 = PG^2 + OG^2 - PD^2 - QD^2 = OG^2 - QD^2$$

Or  $OG^2 - QD^2 = OC^2 - QC^2$ . Mais  $PB \perp \theta Q$  donc

$$PO^2 - PQ^2 = PB^2 - BO^2 - PB^2 - BQ^2 = BO^2 - BQ^2$$

On a donc  $BO^2 - BQ^2 = OG^2 - QD^2 = OC^2 - QC^2$ . Mais cela signifie que  $P = C$  puisque, vectoriellement en choisissant un repère de la droite comme  $O$  et  $\vec{OQ}$ , on a  $\forall T \in \Theta Q$  avec  $\vec{OT} = \lambda \cdot \vec{OQ}$ , l'application  $T \mapsto TO^2 - TQ^2 = \lambda^2 - (1 - \lambda)^2 = -1 + 2 \cdot \lambda$  qui est une injection.

∩

# EXERCICES 5 CORRIGÉ

Commençons par rappeler le théorème qui nous servira tout au long de cette série d'exercices:

**Théorème de Menelaus:** Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre droites telles que chaque paire de droites s'intersecte. Cela donne lieu à six intersections que nous nommons  $A, B, C, D, E$  et  $F$ , d'une manière quelconque. On appelle alors diagonale toute droite passant par deux de ces points qui ne soit pas une des droites  $a, b, c$  ou  $d$ . Sachant qu'il y a quinze paires parmi six éléments et chacune des quatre droites passe par trois paires de points, il ne nous reste donc que trois paires admissibles qui définissent trois droites, celles-ci sont les diagonales  $d_1, d_2$  et  $d_3$ . Supposons que  $d_1$  passe par  $A$  et  $B$ , le théorème de Menelaus nous donne alors que la tétrade  $(A, D; d_2 \cap d_1, d_3 \cap d_1)$  est harmonique si ses intersections existent.

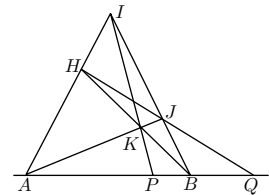
1. Étant donnés  $A, B$  et  $R \in \overline{AB}$ , construire avec un règle non-graduée le conjugué harmonique  $Q$  de  $P$ , en supposant que  $P$  n'est pas au milieu de  $\overline{AB}$ .

L'idée est de construire un quadrilatère complet dont deux sommets seraient  $A$  et  $B$  avec  $AB$  une diagonale et une autre diagonale passant par  $P$ . L'intersection de la troisième diagonale avec  $AB$  nous donnera le point  $Q$  cherché.

On choisit un point  $I$  hors de  $AB$  sur la médiatrice de  $\overline{AB}$  et  $K \in PI \setminus \{P, I\}$  en sorte que  $AK \parallel BI$  et  $BK \parallel AI$  (c'est possible puisque  $AK \parallel BI$  pour un seul point et  $BK \parallel AI$  pour un seul point, il en reste assez). On pose alors  $J = AK \cap BI$  et  $H = BK \cap AI$ .

Alors si  $HJ \parallel AB$  on a  $AJ = BH$  (puisque alors  $J$  et  $H$  sont symétriques par rapport à la médiatrice de  $\overline{AB}$ ) et donc  $K$  est sur la médiatrice ainsi  $P$  y est aussi et donc  $P$  est au milieu.

Si  $HJ \not\parallel AB$  alors on pose  $Q = HJ \cap AB$ . Le quadrilatère dont les sommets sont  $AH I J B K$  est un quadrilatère complet défini par les quatre droites:  $AH = AI, KB, KA$  et  $BI$  dont une des diagonales est  $AB$ , l'autre  $KI = KP$  et la troisième est  $HJ$ . On a alors que  $H(A, B; P, Q)$ .



2. **Définition-Théorème:** Soit  $\gamma$  un cercle de centre  $O$  et  $P$  un point du plan différent de  $O$ . Alors le lieu des points  $Q$  tels que  $PQ$  coupe  $\gamma$  en  $A$  et  $B$  et tel que  $H(A, B; P, Q)$  est une droite si  $P$  est à l'intérieur du cercle ou un segment si  $P$  est à l'extérieur du cercle. C'est l'unique droite  $d$  qui est perpendiculaire à  $\overline{OP}$  et qui passe par  $Q$ , l'unique point de  $\overline{OP}$  qui, si l'on appelle  $A$  et  $B$  les deux points d'intersections de  $\overline{OP}$  avec  $\gamma$ , est conjugué à  $P$  relativement à  $A, B$ .

Soit  $\gamma$  un cercle. On a une application  $\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{\text{droites affines de } \mathbb{R}^2\}$  qui associe à chaque point  $P \in \mathbb{R}^2$  la droite polaire de  $P$  relativement à  $\gamma$ . Cette application est-elle surjective? Est-elle injective?

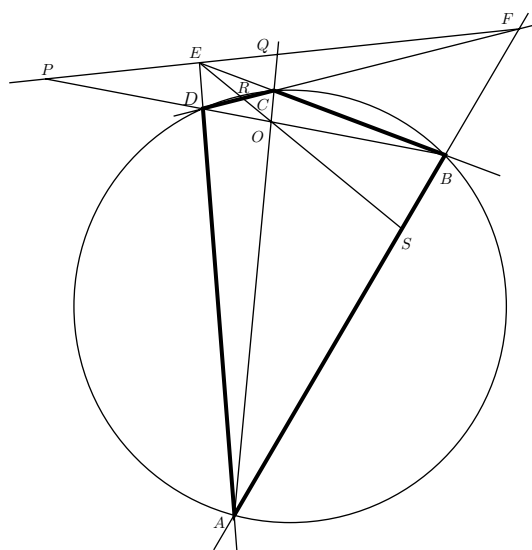
Il faut commencer par corriger: l'application n'est pas définie sur tout  $\mathbb{R}^2$  mais seulement sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ . On montre en lemme des exercices calculatoires, que si  $P$  est conjugué à  $Q$  par un cercle  $\gamma$  alors, en appelant  $A$  et  $B$  les points d'intersection de  $\overline{OP}$  avec  $\gamma$  et en appelant  $p$  et  $q$  les uniques réels tels que  $\vec{OP} = p \cdot \vec{OA}$  et  $\vec{OQ} = q \cdot \vec{OA}$ , on a que  $p = \frac{1}{q}$ . Donc, étant donnés deux points  $P$  et  $P'$  distincts sur la même droite  $OP = OP'$ , les points  $Q$  et  $Q'$  seront distincts puisque l'application  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est une bijection. Ainsi  $\theta(P) \neq \theta(P')$ . Or si  $P$  et  $P' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  sont tels que  $OP \neq OP'$  alors les perpendiculaires  $\theta(P)$  et  $\theta(P')$  seront distinctes également. Ainsi  $P \neq P' \implies \theta(P) \neq \theta(P')$ , et donc  $\theta$  est injective.



Par contre  $\theta$  n'est pas surjective puisque les droites-diamètres du cercle ne peuvent être atteintes, sinon il existerait un  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  tel que le conjugué de  $P$  par rapport à  $A$  et  $B$  serait  $O$ , mais cela n'a pas de sens puisque cela signifierait que  $AP = BP$  et donc que  $P = O$ .

Contrairement aux apparences, la complétion de  $\theta$  se fait dans le plan projectif: la polaire du centre est la droite de l'infini et les points de l'infinis ont des droites-diamètres comme polaire. Et tout ceci s'étend sans trop de difficulté aux cônes.

3. Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscrit dans un cercle  $\gamma$ . Si  $AD$  et  $BC$  se coupent en  $E$ , si  $AB$  et  $CD$  se coupent en  $F$  et si  $O$  est l'intersection des diagonales  $AC$  et  $BD$ , montrer que, dans le triangle  $\triangle OEF$  chaque sommet est le pôle du côté opposé relativement à  $\gamma$ .



Pour montrer que  $EF$  est la polaire de  $O$ , il suffit de montrer que  $EF$  contient deux points de celle-ci, on aura alors que la droite polaire passera par ces deux points et donc sera  $EF$ . Montrons donc que  $H(A, C; O, Q)$  et  $H(B, D; O, P)$ . Il a que  $ECFBAD$  sont les sommets du quadrilatère complet défini par les droites  $DF$ ,  $AF$ ,  $EA$  et  $EB$ . Les diagonales de ce quadrilatère complet sont les droites  $EF$ ,  $AC$  et  $BD$ . Et l'on a que  $O = BD \cap AC$ ,  $Q = EF \cap BD$  et donc  $H(A, C; O, Q)$ , de même  $O = AC \cap BD$  et  $P = EF \cap AC$  donc  $H(B, D; O, P)$ . Donc  $EF$  contient deux points de la polaire de  $O$  et donc  $EF$  est la polaire de  $O$ . Puisque la droite  $OE$  passe par l'intérieur du quadrilatère et par  $E$ , il intersecte le côté opposé de  $E$  dans le triangle  $\triangle EAB$  qui est  $AB$ , disons en  $S$ . Comme la demi-droite de  $EO$  contenant  $O$  et passant par  $E$  est incluse dans les demi-plans de  $ED$ , que celle-ci est non-bornée que l'intérieur du triangle  $\triangle EDC$  doit en contenir un peu,  $ED$  et  $DC$  se coupent, disons en un point  $R$ . Nous voulons montrer que  $H(C, D; F, R)$  et  $H(A, B; S, F)$  ce qui, de la même manière, nous prouvera que  $EO$  est la polaire de  $P$ .

Mais  $OC = OQ$ ,  $OP = OP$ ,  $OF = OF$  et  $OE = OR$ . On peut donc appliquer le théorème qui dit que une tétrade est harmonique si et seulement si son image par une projection centrale est harmonique:

$$H(C, D; F, R) \iff H(Q, P; F, E) \iff H(F, E; Q, P) \iff H(E, F; Q, P)$$

Mais cette dernière tétrade est harmonique donc  $H(C, D; F, R)$  est vrai. De même, on a  $OA = OQ$ ,  $OB = OP$ ,  $OS = OE$  et  $OF = OF$  donc (projection centrale):

$$H(A, B; S, F) \iff H(Q, P; E, F) \iff H(E, F; Q, P)$$

Et cette dernière est vraie. Donc  $H(A, B; S, F)$  est vraie et nous avons montré que  $OE = \theta(F)$ .

Pour montrer que  $OF = \theta(E)$ , on peut refaire de manière facile le même procédé ou échanger les lettres  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow D$  et  $D \rightarrow A$  ce qui a pour effet de changer  $E$  en  $F$  sans changer  $O$ , on applique alors la même preuve.

## Lemme pour le calcul

Soit  $\gamma$  un cercle de centre  $O$  et  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus O$  Appelons  $A$  et  $B$  les deux points d'intersections de  $OP$  avec  $\gamma$ . Paramétrisons  $OP = OA$  par l'équation suivante:

$Q \in OP \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{OQ} = t \cdot \vec{OA}$  Remarquons que pour chaque point  $Q$  de  $OP$  ce  $t$  est unique. Appelons alors  $p$  le réel tel que  $\vec{OP} = p \cdot \vec{OA}$ . On a que  $H(A, B; P, Q)$  si et seulement si  $\vec{OQ} = q \cdot \vec{OA}$  avec  $q = \frac{1}{p}$ .

DEMO Par définition:  $H(A, B; P, Q) \iff \frac{\|\vec{AP}\|}{\|\vec{BP}\|} = \frac{\|\vec{AQ}\|}{\|\vec{BQ}\|}$ . Mais puisque  $\{A, B\} = \gamma \cap \mathcal{O}P$ , on a que  $\vec{OB} = -\vec{OA}$  et donc que  $\vec{BP} = -\vec{OA} + \vec{OP}$ . On a alors  $H(A, B; P, Q)$  si et seulement si:

$$\frac{|1-p|}{|-1-p|} = \frac{\|\vec{AP}\|}{\|\vec{BP}\|} = \frac{\|\vec{AQ}\|}{\|\vec{BQ}\|} = \frac{|1-q|}{|-1-q|}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $p > 0$  quitte à interchanger  $A$  et  $B$ . Pour montrer  $\implies$ , traitons alors deux cas:

- si  $p < 1$  alors  $\frac{|1-q|}{|-1-q|} = |1-p|$  et si  $q < 1$ , on aurait  $\frac{1-p}{1+p} = \frac{1-q}{1+q}$ , ce qui implique que, puisque  $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$  est une bijection de  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  que  $p = q$ .
- Si  $q > 1$   $\frac{1-p}{1+p} = \frac{q-1}{q+1}$  or l'inverse de  $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$  est elle-même donc

$$p = \frac{1 - \frac{q-1}{q+1}}{1 + \frac{q-1}{q+1}} = \frac{1+q-q+1}{1+q+q-1} = \frac{2}{2q} = \frac{1}{q}$$

- si  $p > 1$  alors on a  $\frac{|1-q|}{|-1-q|} = \frac{p-1}{1+p}$  donc  $q > 0$ . Si  $q > 1$  alors  $\frac{p-1}{1+p} = \frac{q-1}{1+q}$  donc  $p = q$ .
- Si  $q < 1$  alors  $\frac{p-1}{1+q} = \frac{1-q}{1+q}$  or  $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$  admet comme inverse  $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$  donc:

$$p = \frac{\frac{1-q}{1+q} + 1}{1 - \frac{1-q}{1+q}} = \frac{2}{2q} = \frac{1}{q}$$

On a ainsi prouvé que si  $Q$  était conjugué à  $P$  relativement à  $AB$  alors  $p = \frac{1}{q}$ .

Maintenant, si  $\frac{p-1}{q}$ , en séparant les deux cas, on arrive aussi facilement:

$$\text{Si } p = \frac{1}{q} < 1 \text{ alors } \frac{\|\vec{AP}\|}{\|\vec{BP}\|} = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{q}} = \frac{q-1}{q+1} = \frac{\|\vec{AQ}\|}{\|\vec{BQ}\|}$$

$$\text{Si } p = \frac{1}{q} > 1 \text{ alors } \frac{\|\vec{AP}\|}{\|\vec{BP}\|} = \frac{p-1}{p+1} = \frac{\frac{1}{q}-1}{1+\frac{1}{q}} = \frac{1-q}{q+1} = \frac{\|\vec{AQ}\|}{\|\vec{BQ}\|}$$

Et donc, dans tous les cas,  $H(A, B; P, Q)$ .

Q

Au vu de la longueur et de la stupidité de l'écriture d'exercices calculatoires, et au vu également de la facilité de la méthode, l'auteur refuse d'écrire un corrigé des exercices calculatoire, nous nous contenterons de donner les réponses numériques:

1. La polaire de  $(\sqrt{2}, 0)$  est la droite  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  par rapport au cercle centré en l'origine de rayon 1.
2. Le pôle de la droite  $y - x - 1 = 0$  est le point  $(-4, 4)$  par rapport au cercle centré à l'origine de rayon **3**. La polaire du point  $(\frac{1}{2}, 0)$  est  $x = 2$  pour le cercle centré à l'origine de rayon **4**. La polaire du point  $(-1, -2)$  par rapport au cercle centré en  $(4, 6)$  est (sauf erreur de calcul de ma part) donné par la droite d'équation paramétrique où  $Z = (0, 0)$ .

$$Z\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{46}{89} \\ 5 - \frac{72}{89} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# EXAMEN CORRIGÉ

4. *Confirmer ou infirmer: Soient deux triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle DEF$  tels que  $AB = DE$ ,  $BC = EF$  et  $\widehat{CAB} = \widehat{FED}$  alors  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .*

Infirmer signifie rendre faible, en mathématiques cela signifie prouver qu'un énoncé est faux. Dans notre cas, l'énoncé prétend que quelque chose est vrai pour toutes paires de triangles satisfaisant l'hypothèse; il ne sera plus vrai si l'on trouve une paire de triangle satisfaisant à l'hypothèse sans que cette chose soit vraie. Voici.

Choisissons deux points  $A$  et  $B$  distincts du plan,  $r > AB$  un réel quelconque et soit  $\gamma$  le cercle de centre  $B$  et de rayon  $r$ , appelons encore  $b$  une droite passant par  $A$  distincte de  $AB$  et non perpendiculaire à  $AB$ . Alors la droite  $b$  coupe le cercle  $\gamma$  en deux points, disons  $P$  et  $Q$ .

Cette dernière affirmation demande un preuve un peu plus rigoureuse: introduisons un repère d'origine  $B$ , la droite  $b$  peut alors se paramétrer comme suit: un point  $P$  est sur la droite si et seulement s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{OP} = \vec{OA} + t \cdot \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est un vecteur directeur de  $b$ . Le cercle est le lieu des points du plan à distance  $r$  de  $B$ , i.e.  $P \in \gamma \iff x^2 + y^2 = r^2$  où  $(x, y) = \vec{OP}$ . Nous savons que notre droite possède un point  $A$  à l'intérieur du cercle. La fonction de distance à  $B$  le long de la droite  $b$  vaut donc moins que  $r$ ; or celle-ci s'exprime comme:

$$d(B, P) = x^2 + y^2 = (a_1 + t \cdot v_1)^2 + (a_2 + t \cdot v_2)^2$$

C'est donc une fonction quadratique convexe de  $t$ . Sachant qu'elle vaut moins que  $r$  quelque part, son minimum est donc inférieur à  $r$  et elle vaudra  $r$  en deux points exactement.

Puisque  $P$  et  $Q$  sont sur le cercles alors que  $A$  et  $B$  ne le sont pas,  $\triangle ABP$  et  $\triangle ABQ$  sont donc des triangles distincts. Mais l'on a alors  $\widehat{PAB} = \widehat{QAB}$ ,  $AB = AB$  et  $BP = BQ$ . Nous avons donc trouvé un spécimen satisfaisant aux hypothèses. Mais ce spécimen ne satisfait pas à la conclusion, puisque si  $\widehat{ABP}$  valait  $\widehat{ABQ}$ , le point  $P$  serait l'image de  $Q$  par la symétrie d'axe  $AB$ , alors la droite  $b$  serait invariante par cette symétrie, donc serait perpendiculaire ou égale à  $AB$ . Un tel spécimen s'appelle donc un contre-exemple.

5. *Soit  $\triangle ABC$  un triangle,  $a$  sa bissectrice en  $A$  et  $b$  sa bissectrice en  $B$ . Soient  $P$  l'intersection de  $a$  avec  $\overline{BC}$  et  $Q$  l'intersection de  $b$  avec  $\overline{AC}$ . Supposons que  $AP = QB$  alors  $\triangle ABC$  est isocèle en  $C$ .*

Le fait que les droites  $a$  et  $b$  coupent le sommet opposé n'est pas tout à fait une trivialité, c'est une conséquence de l'axiome de Pasche, un axiome indémontrable sans les vecteurs. Pour notre cas: un des deux côtés de la bissectrice  $b$  est dans le demi-plan de  $BC$  contenant  $A$  et dans le demi-plan de  $AB$  contenant  $C$ . Maintenant cette demie-droite n'est pas bornée (c'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi loin l'un de l'autre que l'on veut) alors que l'intérieur du triangle est borné (on a montré au numéro 4 des exercices 1 que la distance d'un sommet à un point à l'intérieur du triangle était majorée par la somme des longueurs des côtés, l'inégalité triangulaire nous donne alors que la distance entre deux points à l'intérieure est inférieure à deux fois cette somme). Alors il existe un point  $Z$  de cette demie-droite qui n'est pas dans l'intérieur du triangle, c'est-à-dire qui n'est pas du même côté de  $AC$  que  $B$  et donc le segment  $\overline{ZB}$  coupe la droite  $AC$  en un point  $Q$  qui est dans la demie-droite considérée. Alors  $Q$  ne peut être que dans  $\overline{CA}$  (puisque  $\overline{CA}$  est l'intersection de  $\overline{CA}$  avec les deux demi-plans).

Revenons à nos moutons. Appelons  $O$ , l'intersection des bissectrices. Et  $P$  l'intersection de  $a$  avec  $\overline{BC}$  et  $Q$  l'intersection de  $b$  avec  $\overline{AC}$ . Maintenant les deux segments  $\overline{AP}$  et  $BQ$  sont deux segments de mêmes longueurs se croisant sur la bissectrice des demies-droites  $CA$  et  $CB$ . On peut alors appliquer le lemme ci-dessous qui nous dit que la symétrie dont l'axe est la bissectrice de  $\widehat{ACB}$  envoie  $\overline{AP}$  sur  $\overline{BQ}$ . Clairement elle envoie dans l'ordre  $CPB$  sur  $CQA$  donc elle envoie le point le plus loin du segment  $CA$  sur le point le plus loin du segment  $CB$ , c'est-à-dire  $A$  sur  $B$ , ainsi  $CB = CA$ .

**Lemme** Soient  $a$  et  $b$  deux demie-droites issues d'un point  $O$ . Soit  $P \neq O$  un point de la bissectrice de  $a$  et  $b$ ; considérons l'ensemble  $\mathcal{S}$  des segments  $\overline{MN}$  tels que  $M \in a$ ,  $N \in b$  et  $P \in \overline{MN}$ . Nous prouvons dans ce lemme que deux segments sont de longueurs égales si et seulement s'ils sont images l'un de l'autre par la symétrie dont l'axe est la bissectrice de  $a$  et  $b$ .

**DEMO** Il est clair que si  $\overline{MN}$  est un segment de  $\mathcal{S}$  alors  $\sigma(\overline{MN}) = \overline{\sigma(N)\sigma(M)}$  est un segment de  $\mathcal{S}$  (puisqu'il passe par  $O$ ,  $\sigma(M) \in b$  et  $\sigma(N) \in a$ ) et est de même longueur que  $\overline{MN}$  ( $\sigma$  est une isométrie). Observons que si  $\overline{MN}$  est perpendiculaire à la bissectrice alors  $\sigma(\overline{MN}) = \overline{MN}$ . On a donc prouvé que si  $\overline{MN} \in \mathcal{S}$  et  $\overline{MN}$  n'est pas perpendiculaire à la bissectrice alors il y avait en tous cas un autre segment de même longueur que lui dans  $\mathcal{S}$ . Le "si" est prouvé. Pour prouver le seulement si il nous faut montrer qu'il y a au plus un autre segment de même longueur que lui, pour cela, nous devons utiliser de l'analyse.

Introduisons un repère orthonormé en  $O$  où  $(1, 0)$  est un point de  $a$  et  $(u, v)$  est un point de  $b$  à distance 1 de  $O$ . Disons encore  $(p, q) = P$ . Les demies-droites  $a$  et  $b$  se paramétrisent alors par les équations suivantes:

$$a: \quad (x, y) = (\mu, 0) \quad \mu \in \mathbb{R}_+ \quad b: \quad (x, y) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v) \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Paramétrisons l'ensemble  $\mathcal{S}$  comme suit: disons  $M = (\mu, 0)$  et  $N = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v)$ . La droite  $MN$  se paramétrise alors comme:

$$MN: \quad (x, y) = (\mu, 0) + t \cdot (p - \mu, q) \quad t \in \mathbb{R}$$

Appelons  $t$  le réel tel que  $(\mu, 0) + t \cdot (p - \mu, q) = N = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v)$ . Observons alors que, par le numéro 4 des exercices 3, on a que:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{OM}{ON} = \frac{MP}{NP} = \frac{\|(p-\mu, q)\|}{\|(t-1) \cdot (p-\mu, q)\|} = \frac{1}{t-1}$$

Ce qui revient à  $\lambda = \mu \cdot (t - 1)$  ou encore  $t = \frac{\lambda}{\mu} + 1$ .

Résolvons alors l'équation pour obtenir  $\lambda$  en fonction de  $\mu$ :

$$(\mu, 0) + t \cdot (p - \mu, q) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot v) \text{ id est } \begin{cases} \mu + t \cdot (p - \mu) = \lambda \cdot u \\ tq = \lambda \cdot v \end{cases}$$

On substitue  $t$  dans la dernière équation qui nous donne donc:

$$\frac{\lambda}{\mu} \cdot q + q = \lambda \cdot v \text{ ainsi } \lambda \cdot (v - \frac{q}{\mu}) = q$$

Ceci devient, si  $v \neq \frac{q}{\mu}$ ,  $\lambda = \frac{q \cdot \mu}{v \cdot \mu - q}$ .

Puisque  $P$  est sur la bissectrice et n'est pas  $O$ , le réel  $q$  ne peut être nul et donc  $v = \frac{q}{\mu}$  serait une absurdité. De plus si  $v < \frac{q}{\mu}$ ,  $\lambda$  serait négatif, donc  $N$  ne serait pas sur la demie-droite  $b$ . On suppose donc que  $v > \frac{q}{\mu}$ . Remarquons maintenant que nous avons obtenu tous les  $M$  possibles, puisque chaque  $M$  d'un segment  $\overline{MN}$  de  $\mathcal{S}$  s'exprime comme un  $(\mu, 0)$  avec  $v > \frac{q}{\mu}$ . De plus pour chaque  $\mu$  il y a exactement un segment. Nous avons donc paramétré de manière bijective l'ensemble  $\mathcal{S}$  au moyen de réels  $\mu$  tels que  $v > \frac{q}{\mu}$ .

Calculons maintenant les longueurs:

$$l(\mu) = MN^2 = \|(\lambda \cdot u, \lambda \cdot v) - (\mu, 0)\|^2 = (\lambda \cdot u - \mu)^2 + (\lambda \cdot v)^2$$

Maintenant on développe cette longueur au moyen de l'expression que nous avons obtenu pour  $\lambda$ :

$$l(\mu) = \left( \frac{q\mu}{v\mu - q} \cdot u - \mu \right)^2 + \left( \frac{q\mu}{v\mu - q} \cdot v \right)^2 = \frac{\mu}{v\mu - q} \cdot ((qu - v\mu + q)^2 + (qv)^2)$$

Cette fonction de  $\mu$  est une fonction convexe: en effet la somme de carré en est une et:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 \mu} \left( \frac{\mu}{v\mu - q} \right) = \frac{-2(\mu v^2 - qv) + 2\mu v^2}{(v\mu - q)^3} = \frac{2qv}{(v\mu - q)^3}$$

qui est bien strictement positive pour  $v\mu - q > 0$ . Donc  $l(\mu)$  est le produit de deux fonctions strictement convexes, elle est strictement convexe.

La stricte convexité de  $l(\mu)$  nous donne la chose suivante: étant donné une valeur de  $l(\mu)$ , il ne peut y avoir plus d'un autre  $\mu$  ayant tel que  $l(\mu)$  lui est égal. De plus il n'y a qu'un seul point où la valeur n'est atteinte qu'une seule fois, à savoir le minimum. Ainsi étant donnés deux segments de  $\mathcal{S}$  de même longueur, il y a au plus un autre segment de  $\mathcal{S}$  qui a même longueur. Et il y a exactement un segment qui est le seul à avoir cette longueur. Sachant que tous les segments sauf le perpendiculaire à la bissectrice en a deux. On conclut que ce minimum est le segment perpendiculaire à la bissectrice. Sachant que l'on a au moins un autre segment de même longueur au moins pour tous les autres segments, on conclut qu'il y a exactement un autre segment, celui qui est symétrique.

□

# EXERCICES 6 CORRIGÉ

Nous nous proposons de commencer par les deux derniers exercices qui nous permettront de donner tout de suite une expression complète pour les deux premiers.

Nous nous permettons de confondre complètement vecteurs et points, puisqu'après tout, un vecteur et un point sont dans le même ensemble  $\mathbb{R}^2$ , on a alors que  $\vec{XY} = Y - X$  et nous pouvons alors additionner les vecteurs et les multiplier par un scalaire; la norme d'un point est encore définie:  $\|(x, y)\| = \|\sqrt{x^2 + y^2}\|$ . On appelle  $O = (0, 0)$  le zéro de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

3. Montrer qu'une homothétie est toujours conjuguée par une translation à une homothétie centrée à l'origine

Soit  $\eta$  (dites éta) une homothétie de centre  $P$  et de rapport  $k$ . Celle-ci est caractérisée par la condition suivante:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{P\eta(X)} = k \cdot \vec{PX}$$

qui se réécrit en:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \quad \eta(X) - P = k \cdot (X - P) \text{ ce qui revient à } \eta(X) = k \cdot (X - P) + P$$

Appelons  $\tau$  (dire tao) la translation d'amplitude  $-P$ , c'est-à-dire d'amplitude  $\vec{PO}$  ou encore la translation qui amène  $P$  sur  $O$ . Alors  $\tau^{-1}$  est la translation d'amplitude  $P$ .

Si  $\kappa$  (dites kappa) est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ . On a  $\forall X \in \mathbb{R}^2$ :

$$\tau^{-1} \circ \kappa \circ \tau(X) = \tau^{-1} \circ \kappa(X - P) = \tau^{-1}(k \cdot (X - P)) = k \cdot (X - P) + P$$

qui n'est autre que  $\eta(X)$ . Ainsi  $\eta(X) = \tau^{-1} \circ \kappa \circ \tau(X)$  pour chaque  $X$  et donc les deux applications sont égales, i.e.  $\eta = \tau^{-1} \circ \kappa \circ \tau$ .

On a donc montré que toute homothétie de rapport  $k$  et de centre  $P$  était conjuguée à une homothétie centrée à l'origine et de rapport  $k$  par la translation d'amplitude  $-P$ .

4. Soit  $\iota$  (iota) une inversion autour d'un cercle centré en  $P$  et de rayon  $r$ , elle est définie par la propriété suivante:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \quad \overrightarrow{P\iota(X)} = \frac{r^2}{\|\vec{PX}\|^2} \cdot \vec{PX}$$

qui se réécrit en:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \quad \iota(X) - P = \frac{r^2}{\|\vec{X-P}\|^2} \cdot \vec{PX} \text{ c'est-à-dire } \iota(X) = \frac{r^2}{\|\vec{X-P}\|^2} \cdot (X - P) + P$$

En appelant encore  $\tau$  la translation d'amplitude  $-P$ , cette même condition devient:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \quad \iota(X) = \frac{r^2}{\|\vec{X-P}\|^2} \cdot (X - P) + P = \tau^{-1} \left( \frac{r^2}{\|\vec{\tau(X)}\|^2} \cdot \tau(X) \right)$$

Et donc  $\iota = \tau^{-1} \circ \xi \circ \tau$  où  $\xi(X) = \frac{r^2}{\|\vec{X}\|^2} \forall X$ , i.e.  $\xi$  (prononcer xi) est une inversion autour du cercle centré à l'origine et de rayon  $r$ .

Il nous reste à prouver que  $\xi$  est conjuguée à l'inversion autour du cercle unité. Appelons  $\eta$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $r$ ,  $\eta(X) = r \cdot X$ . On a alors  $\forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ :

$$\eta^{-1} \circ \xi \circ \eta(X) = \eta^{-1} \circ \xi(r \cdot X) = \eta^{-1} \left( \frac{r^2}{\|\vec{r \cdot X}\|^2} \cdot r \cdot X \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{r^2 \cdot \|\vec{X}\|^2} \cdot r \cdot X = \frac{1}{\|\vec{X}\|^2} \cdot X$$

Donc  $\eta^{-1} \circ \xi \circ \eta$  est l'inversion  $\zeta$  (zéta) autour du cercle unité.

Ainsi  $\xi = \eta \circ \zeta \circ \eta^{-1}$  d'où  $\iota = \tau^{-1} \circ \xi \circ \tau = \tau^{-1} \circ \eta \circ \zeta \circ \eta^{-1} \circ \tau = (\eta^{-1} \circ \tau)^{-1} \circ \zeta \circ (\eta^{-1} \circ \tau)$ .

Nous venons donc de montrer que toute inversion autour d'un cercle de centre  $P$  et de rayon  $r$  est le conjugué de l'inversion autour du cercle unité par la composition d'une translation d'amplitude  $-P$  suivie d'une homothétie centrée à l'origine de rapport  $\frac{1}{r}$ .

1. Par l'exercice 4, notre inversion  $\iota$  s'exprime de manière générale comme  $\iota(X) = (\eta \circ \tau)^{-1} \circ \zeta \circ (\eta \circ \tau)(X)$
- où  $\zeta$  est l'inversion autour du cercle unité  $\zeta(X) = \frac{1}{\|X\|^2} \cdot X$
  - où  $\eta$  est l'homothétie centrée à l'origine de rapport  $\frac{1}{3}$ :  $\eta(X) = \frac{1}{3} \cdot X$
  - où  $\tau$  est la translation d'amplitude  $-(5, -2)$ :  $\tau(X) = X - (5, -2)$

On a donc  $\eta \circ \tau(X) = \frac{1}{3} \cdot (X - (5, -2))$  et donc  $(\eta \circ \tau)^{-1}(X) = 3 \cdot X + (5, 2)$ . Ainsi:

$$\iota(X) = (\eta \circ \tau)^{-1} \circ \zeta \circ (\eta \circ \tau)(X) = (5, 2) + 3 \cdot \frac{1}{\|\frac{1}{3} \cdot (X - (5, -2))\|^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (X - (5, -2))$$

Pour le point  $(0, 0)$ , cela donne:

$$\iota(0, 0) = (5, -2) + \frac{1}{\|\frac{1}{3} \cdot (-5, 2)\|^2} \cdot (-5, 2) = (5, -2) + \frac{9}{29} \cdot (-5, 2) = \frac{10}{29} \cdot (5, -2) = \left(\frac{100}{29}, \frac{-20}{29}\right)$$

2. On applique l'exercice 3: notre homothétie  $\eta$  est  $\tau^{-1} \circ \kappa \circ \tau$  où  $\tau$  est la translation envoyant  $(1, 3)$  sur  $(0, 0)$  i.e  $\tau(X) = X - (1, 3)$  et  $\kappa$  est l'homothétie centrée à l'origine et de rapport 2:  $\kappa(X) = 2 \cdot X$ . On a alors:

$$\eta(X) = (1, 3) + 2 \cdot (X - (1, 3))$$

Pour le second cas, on applique toujours l'exercice 3: on  $\tau(X) = X - (1, 0)$  et  $\kappa(X) = \frac{1}{3} \cdot X$  et:

$$\eta(X) = \tau^{-1} \circ \kappa \circ \tau(X) = (1, 0) + \frac{1}{3} \cdot (X - (1, 0))$$

# EXERCICES 7 — CORRIGÉ

Nous nous proposons de ne travailler que dans  $\mathbb{R}^2$ , explicitement avec des coordonnées, et de définir les isométries de ce plan. Nous permettrons des légers abus de langages, tout particulièrement, nous nous permettrons de noter les composantes d'un point ou d'un vecteur en ligne ou en colonne selon l'apparence typographique. Aussi, nous nous permettrons de donner des vecteurs à manger aux transformations.

**Définition:** Soit  $\vec{v} = (a, b)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , on appelle translation d'amplitude  $\vec{v}$  la transformation  $\tau$  définie par  $\tau_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$ . C'est une bijection puisque l'application  $\tau_{\vec{v}}^{-1}(x, y) = (x - a, y - b)$  est son inverse (en effet  $\tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{v}}^{-1}(x, y) = \tau_{\vec{v}}(x - a, y - b) = (x - a + a, y - b + b) = (x, y)$  et  $\tau_{\vec{v}}^{-1} \circ \tau_{\vec{v}}(x, y) = \tau_{\vec{v}}^{-1}(x + a, y + b) = (x + a - a, y + b - b) = (x, y)$ ).

**Définition:** Soit  $\theta$  un nombre réel, on appelle rotation à l'origine d'angle  $\theta$  la transformation  $\rho$  définie par :

$$\rho_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \\ x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'application  $\rho$  ainsi définie est une bijection. C'est-à-dire trouver son inverse.

Intuitivement, faire une rotation d'un angle  $\theta$  et faire une rotation d'un angle  $-\theta$  sont deux transformations inverses l'une de l'autre. Vérifions donc que  $\rho_{\theta} \circ \rho_{-\theta} = Id$  et que  $\rho_{-\theta} \circ \rho_{\theta} = Id$ :

$$\begin{aligned} \rho_{\theta} \circ \rho_{-\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \rho_{\theta} \left( \begin{pmatrix} \cos -\theta & \sin -\theta \\ \sin -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \cdot \sin \theta - \cos \theta \cdot \sin \theta \\ \sin \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi  $\rho_{\theta} \circ \rho_{-\theta} = Id$ . Pour prouver que  $\rho_{-\theta} \circ \rho_{\theta}$  est l'identité aussi, il suffit d'échanger les rôles de  $\theta$  et  $-\theta$  dans le calcul ci-haut, c'est-à-dire poser  $\theta' = -\theta$  et faire le calcul avec  $\theta'$ . Ceci est possible puisque ce calcul est valable pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Ainsi une rotation à l'origine d'angle  $\theta$  est une bijection dont l'inverse est une rotation à l'origine d'angle  $-\theta$ .

**Définition:** Étant donné un point  $C = (c_1, c_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on appelle rotation de centre  $C$  et d'angle  $\theta$  le conjugué  $\rho_{\theta}^C$  d'une rotation  $\rho_{\theta}$  par la translation  $\tau_{C\vec{O}}$  où  $O$  est l'origine  $O = (0, 0)$ . Ceci revient à poser  $\rho_{\theta}^C(x, y) = \tau_{C\vec{O}}^{-1} \circ \rho_{\theta} \circ \tau_{C\vec{O}}(x, y)$ .

**Définition:** On appelle symétrie d'axe  $Oy$  l'application  $\sigma_{Oy}(x, y) = (-x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Pour toute droite  $d$ , on appelle symétrie d'axe  $d$  la transformation définie par :

$$\sigma_d = (\tau_{P\vec{O}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{P\vec{O}} \circ \rho_{\theta})$$

Où  $P$  est un point de  $d$  et  $\theta$  est un réel tel que  $\rho_{\theta}^{-1}(Oy)$  est parallèle à  $d$ , ce qui est équivalent à dire que  $(\tau_{P\vec{O}} \circ \rho_{\theta})^{-1}(Oy) = d$ .

Il vous faut absolument noter que dans toutes ces définitions sauf les deux dernières, l'identité  $\iota(x, y) = (x, y)$  est une possibilité.

2. Montrer que toute symétrie est une involution c'est-à-dire une transformation qui, si elle est appliquée deux fois, devient l'identité. Concluez que la symétrie est une bijection.

Observons d'abord que  $\sigma_{Oy} \circ \sigma_{Oy}(x, y) = \sigma_{Oy}(-x, y) = (x, y)$  donc  $\sigma_{Oy}$  est une involution.

Supposons maintenant que  $d = (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1}(Oy)$  alors :

$$\begin{aligned} \sigma_d \circ \sigma_d &= (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}) \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}) \\ &= (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}) = (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}) = Id \end{aligned}$$



Ainsi une symétrie est son propre inverse; puisqu'elle admet un inverse, une symétrie est une bijection.

3. *Vrai ou faux: une symétrie suivie d'une rotation est encore une symétrie.*

Avant de répondre à la question, laissez-moi présenter un petit lemme vraiment pratique:

**Lemme** Les isométries ne commutent pas en général, mais on a,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$  et  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ :

$$\sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\sigma_{Oy}(\vec{v})} \circ \sigma_{Oy} \quad \text{et} \quad \rho_{\theta} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\rho_{\theta}(\vec{v})} \circ \rho_{\theta} \quad \text{et} \quad \sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta} = \rho_{-\theta} \circ \sigma_{Oy}$$

DEMO Il suffit de calculer, en tous cas pour la première ligne:

$$\begin{aligned} \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sigma_{Oy} \begin{pmatrix} x+v_1 \\ y+v_2 \end{pmatrix} = (x+v_1, -y-v_2) = \tau_{\sigma_{Oy}(\vec{v})} \circ \sigma_{Oy} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \rho_{\theta} \circ \tau_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \rho_{\theta} \begin{pmatrix} x+v_1 \\ y+v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \tau_{\rho_{\theta}(\vec{v})} \circ \rho_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour la seconde ligne, permettons de calculer séparément  $\sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta}$  et  $\rho_{-\theta} \circ \sigma_{Oy}$  pour voir qu'elles coïncident:

$$\begin{aligned} \rho_{-\theta} \circ \sigma_{Oy} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi  $\rho_{-\theta} \circ \sigma_{Oy}$  et  $\sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta}$  coïncident sur tous les points et sont donc égales.

Q

Armé de ce lemme, nous pouvons attaqer de face l'exploration ce que sera la composition d'une symétrie puis d'une rotation: supposons que notre symétrie est  $(\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})$  est que la rotation est  $\tau_{\vec{w}}^{-1} \circ \rho_{\nu} \circ \tau_{\vec{w}}$  (rho-upsilon). La composition  $\varphi$  est alors: est alors:

$$\begin{aligned} \varphi &= \tau_{\vec{w}}^{-1} \circ \rho_{\nu} \circ \tau_{\vec{w}} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}) = \tau_{\vec{w}}^{-1} \circ \rho_{\nu} \circ \tau_{\vec{w}} \circ \rho_{-\theta} \circ \tau_{-\vec{v}} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta} \\ &= \tau_{-\vec{w}+\rho_{\nu}(\vec{w})-\rho_{\nu} \circ \rho_{-\theta}(\vec{v})} \circ \rho_{\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{w}} \circ \rho_{\theta} = \tau_{-\vec{w}+\rho_{\nu}(\vec{w})-\rho_{\nu-\theta}(\vec{v})+\rho_{\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy}(v)} \circ \rho_{\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta} \end{aligned}$$

Grâce à notre lemme de commutation, nous pouvons passer "juste ce qu'il faut" de  $\nu - \theta$  pour faire un sorte que les trois derniers facteurs soient une conjugaison, passons  $\frac{1}{2}\nu$  de l'autre côté de la symétrie:

$$\begin{aligned} \varphi &= \tau_{-\vec{w}+\rho_{\nu}(\vec{w})-\rho_{\nu-\theta}(\vec{v})+\rho_{\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy}(v)} \circ \rho_{\frac{1}{2}\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta-\frac{1}{2}\nu} \\ &= \tau_{-\vec{w}+\rho_{\nu}(\vec{w})-\rho_{\nu-\theta}(\vec{v})+\rho_{\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy}(v)} \circ \rho_{\theta-\frac{1}{2}\nu}^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ \rho_{\theta-\frac{1}{2}\nu} \end{aligned}$$

Ainsi notre transformation  $\varphi$  n'est rien d'autre que la composition d'une translation suivie d'une symétrie, nous prouverons à l'exercice 5 que c'est une symétrie si l'amplitude de notre translation est  $\perp$  à l'axe de symétrie et, à l'exercice 6, que ce n'en est pas une si l'amplitude de notre translation est non-nulle et  $\parallel$  à l'axe de symétrie. Dans les autres cas, l'amplitude  $\vec{z} = -\vec{w} + \rho_{\nu}(\vec{w}) - \rho_{\nu-\theta}(\vec{v}) + \rho_{\nu-\theta} \circ \sigma_{Oy}(v)$  se décompose de manière unique en  $\vec{a} + \vec{b}$  ou  $\vec{a}$  est  $\parallel$  à l'axe et  $\vec{b}$   $\perp$  à l'axe, sachant que la composée de la symétrie avec  $\tau_{\vec{b}}$  est encore une symétrie (exercice 4),  $\varphi$  ne sera une symétrie que si  $\vec{a}$  est nul.

4. *Montrer que la composition d'une translation et d'une symétrie dont l'axe est orthogonal au vecteur de translation est encore une symétrie.*

Supposons que notre symétrie est  $(\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})$  et que notre translation est  $\tau_{\vec{w}}$  avec  $\vec{w} \perp (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1}(Oy)$  i.e.  $\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}(\vec{w}) \perp Oy$  or les translations préservent les angles donc  $\rho_{\theta}(\vec{w}) \perp Oy$ . Alors notre composée  $\varphi$  sera:

$$\varphi = \tau_{\vec{w}} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta})^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}) = \tau_{\vec{w}} \circ \rho_{-\theta} \circ \tau_{-\vec{v}} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta} = \rho_{-\theta} \circ \tau_{-\vec{v}+\rho_{\theta}(\vec{w})} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v}} \circ \rho_{\theta}$$

Or  $\rho_{\theta}(\vec{w}) \perp Oy$  signifie que la seconde composante de  $\rho_{\theta}(\vec{w})$  est nulle et donc  $\sigma_{Oy}(\rho_{\theta}(\vec{w})) = -\rho_{\theta}(\vec{w})$ . Et donc, pour tout réel  $\lambda$ , on a  $\sigma_{Oy}(\lambda \cdot \rho_{\theta}(\vec{w})) = -\lambda \cdot \rho_{\theta}(\vec{w})$  ainsi l'on peut passer une moitié de  $\rho_{\theta}(\vec{w})$  de l'autre côté de  $\sigma_{Oy}$  cela donne:

$$\begin{aligned}\varphi &= \rho_{-\theta} \circ \tau_{-\vec{v} + \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})} \circ \rho\theta = \rho_{-\theta} \circ \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})}^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})} \circ \rho\theta \\ &= \left( \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})} \circ \rho\theta \right)^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ \left( \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})} \circ \rho\theta \right)\end{aligned}$$

qui est donc bien une symétrie d'axe

$$\left( \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})} \circ \rho\theta \right)^{-1} (Oy) = \rho_{-\theta} \circ \tau_{\vec{v} - \frac{1}{2}\rho\theta(\vec{w})}^{-1} (Oy) = \tau_{\frac{1}{2}\vec{w}}(d)$$

où  $d$  est l'axe de la première symétrie,  $d = (\tau_{\vec{v}} \circ \rho\theta)^{-1} (Oy)$ .

**Définition:** Étant donnée une transformation  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$ , on dit qu'elle préserve l'orientation si pour tout triplet de points distincts  $O, P$  et  $Q$  les nombres  $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$  et  $\det(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}, \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)})$  ont même signe. Si les nombres  $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$  et  $\det(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}, \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)})$  ont des signes opposés pour tout triplet, alors on dira qu'elle renverse l'orientation.

5. Montrer que le produit deux transformations qui préservent l'orientation préserve l'orientation, que le produit d'une transformation qui préserve l'orientation et une qui renverse l'orientation renverse l'orientation. Montrer alors que les translations et les rotations préservent l'orientation et qu'une symétrie renverse l'orientation.

Écrivons  $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  la fonction qui à chaque réel associe  $-1$  s'il est négatif,  $0$  s'il est nul et  $1$  s'il est positif. La preuve est un peu machinale: Soient  $\varphi$  et  $\Psi$ , deux transformations qui préservent l'orientation alors pour tout  $O, P$  et  $Q$  trois points distincts, on a que:

$$\text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(P)\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(Q)}) = \text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)\varphi(O)\varphi(Q)}) = \text{sgn} \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$$

Donc  $\varphi \circ \Psi$  préserve l'orientation.

Si  $\varphi$  préserve l'orientation et  $\Psi$  la renverse alors:

$$\text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(P)\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(Q)}) = -\text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)\varphi(O)\varphi(Q)}) = -\text{sgn} \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$$

Ainsi  $\varphi \circ \Psi$  renverse l'orientation.

Si  $\varphi$  renverse l'orientation et  $\Psi$  la préserve:

$$\text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(P)\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(Q)}) = \text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)\varphi(O)\varphi(Q)}) = -\text{sgn} \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$$

Ainsi  $\varphi \circ \Psi$  renverse l'orientation: Si  $\varphi$  et renverse l'orientation et  $\Psi$  aussi alors:

$$\text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(P)\varphi \circ \Psi(O)\varphi \circ \Psi(Q)}) = -\text{sgn} \det(\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)\varphi(O)\varphi(Q)}) = \text{sgn} \det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$$

Donc  $\varphi \circ \Psi$  préserve l'orientation.

Passons à la partie plus intéressante: si  $\varphi$  est un translation  $\tau_{\vec{v}}$  alors, pour tout  $X$  et  $Y$  on a:  $\overrightarrow{\varphi(X)\varphi(Y)} = \varphi(Y) - \varphi(X) = Y + \vec{v} - X - \vec{v} = Y - X = \overrightarrow{XY}$  ainsi le déterminant ne sera pas changé. Donc une translation préserve l'orientation.

Si  $\varphi$  est une transformation donnée par:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  alors observons le phénomène suivant: étant donné  $X$  et  $Y$  deux points, on a que:

$$\overrightarrow{\varphi(X)\varphi(Y)} = \varphi(Y) - \varphi(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Y - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (Y - X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overrightarrow{XY}$$

Ainsi la matrice dont les colonnes sont  $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$  et  $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(Q)}$  est le produit de  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  par la matrice dont les colonnes sont  $\overrightarrow{OP}$  et  $\overrightarrow{OQ}$ . Or le déterminant envoie produit sur produit donc:  $\varphi$  préserve l'orientation si et seulement si  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$  et renverse l'orientation si et seulement si  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < 0$ .

On peut donc dire qu'une rotation à l'origine préserve l'orientation puisque  $\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  et que la symétrie d'axe  $Oy$  renverse l'orientation puisque  $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$ .

On peut alors, grâce au produit, généraliser ces résultats:

- toute rotation  $\tau_{-\vec{v}} \circ \rho\theta \circ \tau_{\vec{v}}$  préserve l'orientation.

– toute symétrie  $(\tau_{OP} \circ \rho_\theta)^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{OP} \circ \rho_\theta)$  renverse l'orientation.

6. Soient  $\sigma_d$  une symétrie d'axe  $d$  et  $\tau_{\vec{w}}$  une translation d'amplitude  $\vec{w}$  non-nulle et parallèle à  $d$ , montrer que la composition  $\tau_{\vec{w}} \circ \sigma_d$  est une transformation sans points fixes et qui n'est donc ni une symétrie, ni une rotation. Montrer qu'elle renverse l'orientation et donc qu'elle n'est pas non-plus une translation. Cette transformation s'appelle un retournement sans points fixes.

On suppose, comme d'habitude que la symétrie est  $(\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta)^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta)$  et que la translation est  $\tau_{\vec{w}}$  avec  $\vec{w} \parallel (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta)^{-1}(Oy)$  i.e.  $\vec{w} \parallel Oy$ . Il est clair que la composition renverse l'orientation, montrons qu'elle n'a pas de point fixes: pour cela observons d'abord que la conjugaison transporte les points fixes, en effet si  $\varphi(X) = X$  et  $\Psi$  est une autre transformation alors:  $\Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi(\Psi^{-1}(X)) = \Psi^{-1}(X)$  donc  $\Psi^{-1}(X)$  est un point fixe de  $\Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi$ .

Or,  $\forall \vec{z} \parallel Oy$  la transformation  $\tau_{\vec{z}} \circ \sigma_{Oy}$  n'a pas de points fixes sinon on aurait un  $X$  tel que  $\tau_{\vec{z}} \circ \sigma_{Oy}(X) = X$  i.e.  $\sigma_{Oy}(X) = X + \vec{z}$  et ceci est absurde puisque en deuxième composante, on a  $x_2$  et  $x_2 + z_2$ , ces deux nombres ne peuvent être égaux à moins que  $z_2$  soit nul, mais, puisque  $\vec{z}$  est parallèle à  $Oy$ , sa première composante est nulle donc  $\vec{z}$  serait nul.

Montrons alors que  $\tau_{\vec{w}} \circ \sigma_{Oy}$  est le conjugué d'une telle transformation:

$$\tau_{\vec{w}} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta)^{-1} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta) = \rho_{-\theta} \circ \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\rho_\theta(\vec{w})} \circ \sigma_{Oy} \circ \tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta$$

qui n'est rien d'autre que  $(\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta)^{-1} \circ \tau_{\rho_\theta(\vec{w})} \circ \sigma_{Oy} \circ (\tau_{\vec{v}} \circ \rho_\theta)$  ainsi le nombre de points fixes de  $\tau_{\vec{w}} \circ \sigma_d$  est le même que celui de  $\tau_{\rho_\theta(\vec{w})} \circ \sigma_{Oy}$ , or  $\rho_\theta(\vec{w}) \parallel Oy$  ainsi  $\tau_{\rho_\theta(\vec{w})} \circ \sigma_{Oy}$  n'a pas de points fixes donc  $\tau_{\vec{w}} \circ \sigma_d$  n'en a pas non-plus.

Ainsi  $\tau_{\vec{w}} \circ \sigma_d$  est une transformation qui renverse l'orientation donc elle n'est ni une rotation ni une translation et qui n'a pas de points fixes donc elle n'est pas non-plus une symétrie. Il a bien fallu lui inventer un nom, retournement sans points fixes paraissait adapté.

## COMPLÉMENT AU COURS

**Théorème** Soit  $\varphi$  une bijection entre deux droites projectives distinctes  $d$  et  $d'$ , supposons que  $\varphi$  préserve le birapport signé alors  $\varphi$  est une perspectivité.

DEMO Deux cas se présentent: si l'on appelle  $X$  le point d'intersection de  $d$  et  $d'$  alors soit  $\varphi(X) = X$  soit  $\varphi(X) \neq X$ .

- Si  $\varphi(X) = X$  alors soient  $A$  et  $B$  deux points distincts et distincts de  $X$  et  $A' = \varphi(A)$  et  $B' = \varphi(B)$ . Puisque  $A$  et  $B$  sont distincts de  $X$ , leurs images sont distinctes de leur source (sinon les droites possèderaient deux points en commun) et elles sont distinctes l'une de l'autre puisque  $\varphi$  est une bijection. Alors les droites  $AA'$  et  $BB'$  sont distinctes et s'intersectent en un point qui n'est ni dans  $d$  ni dans  $d'$ , disons  $O$ , alors la projection  $\pi$  de  $d$  sur  $d'$  au centre  $O$  envoie  $A$  sur  $A'$ ,  $B$  sur  $B'$  et  $X$  sur  $X$ , c'est une bijection préservant le birapport signé et coïncidant avec  $\varphi$  sur trois points, c'est donc la même transformation.
- Si  $\varphi(X) \neq X$  alors choisissons un point  $P'$  de  $d'$  distinct de  $\varphi(X)$  et de  $X$ , soit  $P = \varphi^{-1}(P')$ , et une droite  $c$  distincte de  $d'$  et de  $PP'$ . Choisissons un point  $O$  de  $PP'$  distinct de  $P$  et de  $P'$ . Appelons  $\pi$  la projection de  $c$  sur  $d$  au centre  $O$ . Elle envoie  $P'$  sur  $P$ . Et composons  $\pi$  avec  $\varphi$ , cela donne une transformation  $\Psi$  entre  $c$  et  $d'$  envoyant  $P'$  sur lui-même. Le premier cas nous dit alors que c'est une projection centrale, donc  $\varphi = \Psi \circ \pi^{-1}$ . Ainsi  $\varphi$  est la composition de deux projections centrales.



**Corollaire** Soit  $\varphi$  une bijection entre deux droites projectives quelconques  $d$  et  $d'$ , si  $\varphi$  préserve le birapport alors  $\varphi$  est la composition d'au plus trois projections centrales.

DEMO Si  $d \neq d'$  alors le théorème s'applique directement. Sinon, i.e.  $d = d'$  on peut choisir un point  $O$  hors de  $d$  et une droite  $d''$  ne passant pas par  $O$  alors soit  $\pi$  la projection centrale de  $d''$  sur  $d$  au centre  $O$ . On peut appliquer le théorème à  $\varphi \circ \pi$  qui nous dit que  $\varphi \circ \pi$  est la composition d'au plus deux projections centrales  $\varphi \circ \pi = \alpha \circ \beta$ . Alors on a que  $\varphi = \alpha \circ \beta \circ \pi^{-1}$  qui est une composition de trois projections centrales.

□

## EXERCICES 8 CORRIGÉ

1. i) Soient les deux droites affines de  $\mathbb{R}^2$  définies par:

$$d_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 1\} \quad \text{et} \quad d_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1\}$$

Utilisons les coordonnées  $x$  sur  $d_1$  et  $y$  sur  $d_2$ . Trouver alors la fonction  $y(x)$  correspondant à la projection centrale de  $d_1$  sur  $d_2$  émanant de l'origine  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Quelle est la valeur de cette fonction en  $x = 0$  ?

Étant donné un point  $(x, 1) \in d_1$ , la droite  $d$  passant par  $(0, 0)$  et  $(x, 1)$  se donne par l'équation paramétrique:

$$d = \{(\lambda \cdot x, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

La projection  $(1, y)$  de  $(x, 1)$  sur  $d_2$  au centre  $(0, 0)$  sera le point d'intersection de  $d$  et  $d_2$  s'il existe. Notez qu'il ne peut y avoir plus d'un point d'intersection, sinon  $d$  et  $d_2$  seraient confondues ce qui est absurde puisque  $(0, 0) \in d$  alors qu'il n'est pas dans  $d_2$  (en effet  $0 \neq 1$ ).

L'intersection de  $d$  et  $d_2$  est, s'il existe, le point  $(1, y)$  tel qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  en sorte que  $(1, y) = (\lambda \cdot x, \lambda)$  i.e.  $\lambda \cdot x = 1$  et  $y = \lambda$ .

Notez que si  $\lambda = 0$ , ce n'est pas possible, donc  $\lambda = 0$  n'est pas le  $\lambda$  qu'on cherche.

En outre, si  $x = 0$ , il n'y a aucun  $\lambda$  possible, ainsi le point  $(0, 1)$  n'a pas d'image par la projection centrale de  $d_1$  sur  $d_2$  au centre  $(0, 0)$ .

Si  $x \neq 0$  alors  $\lambda = \frac{1}{x}$  est le  $\lambda$  cherché C'est-à-dire que  $(\lambda \cdot x, \lambda) = (1, \frac{1}{x})$  est l'intersection de  $d$  et de  $d_2$  que nous cherchons. Et donc  $y(x) = \frac{1}{x}$  est la fonction cherchée.

ii) Généraliser au cas où

$$d_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0\} \quad \text{et} \quad d_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0\}$$

sont deux droites affines quelconques ne passant pas par l'origine  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Étant donné un point  $P = (p, q)$  de  $d_1$ , la droite  $d_P$  est:

$$d_P = \{\lambda \cdot p, \lambda \cdot q | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

et la projection centrale de  $(p, q)$  sur  $d_2$  au centre  $(0, 0)$  sera l'unique point d'intersection de  $d_P$  avec  $d_2$  s'il existe (encore une fois, il ne peut y avoir plus d'un point d'intersection, pourquoi?). On a alors:

$$d_P \cap d_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \exists \lambda \in \mathbb{R} (x, y) = \lambda \cdot (p, q) \text{ et } a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0\}$$

Cet ensemble est égal aux suivants puisque conditions sont équivalentes:

$$\begin{aligned} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \exists \lambda \in \mathbb{R} (x, y) = \lambda \cdot (p, q) \text{ et } a_2 \cdot \lambda \cdot p + b_2 \cdot \lambda \cdot q + c_2 = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \exists \lambda \in \mathbb{R} (x, y) = \lambda \cdot (p, q) \text{ et } \lambda \cdot (a_2 \cdot p + b_2 \cdot q) = -c_2\} \end{aligned}$$

Ici, il nous faut différencier les deux situations: soit  $a_2 \cdot p + b_2 \cdot q = 0$  soit  $a_2 \cdot p + b_2 \cdot q \neq 0$ .

Si  $a_2 \cdot p + b_2 \cdot q = 0$ ,  $c_2$  devrait être nul mais donc  $d_2$  contiendrait  $(0, 0)$  (puisque  $(0, 0)$  satisfait à la condition), ce qui est absurde. Ainsi la condition serait toujours fautive et donc l'intersection serait vide, c'est-à-dire que la projection de  $(p, q)$  sur  $d_2$  au centre  $(0, 0)$  ne serait pas définie.

Si  $a_2 \cdot p + b_2 \cdot q \neq 0$  alors  $\lambda = \frac{-c_2}{a_2 \cdot p + b_2 \cdot q}$  est l'unique  $\lambda$  possible, et donc l'ensemble  $d_2 \cap d_P$  n'est composé que d'un point:

$$d_2 \cap d_P = \left\{ \left( \frac{-p \cdot c_2}{a_2 \cdot p + b_2 \cdot q}, \frac{-q \cdot c_2}{a_2 \cdot p + b_2 \cdot q} \right) \right\}$$

Et cet unique point est la projection centrale de  $(p, q)$  sur  $d_2$  au centre  $(0, 0)$ .

2. • Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux droites et  $P \in \mathbb{R}^2$  un point qui n'est ni dans  $d_1$  ni dans  $d_2$ . Prouver que  $d_1 \parallel d_2$  si et seulement si la projection centrale de  $d_1$  sur  $d_2$  est définie pour tous les points de  $d_1$ .

**Seul. Si:** si  $d_1 \parallel d_2$  alors pour tout  $R \in d_1$ , la droite  $PR$  n'est pas parallèle à  $d_2$  sinon  $PR \parallel d_2 \parallel d_1$  (lire serait parallèle à) donc  $PR \parallel d_1$  ce qui est absurde puisque  $R \in d_1$ . Ainsi  $PR$  coupe  $d_2$  en un point (unique puisque  $PR \neq d_2$  puisque  $PR \ni P \notin d_2$ ); ce point d'intersection est la projection de  $R$  sur  $d_2$  au centre  $P$ . Ce raisonnement étant valable pour tout point  $R \in d_1$ , la projection centrale de  $d_1$  sur  $d_2$  au centre  $P$  est partout définie.

**Si:** Si  $\forall R \in d_1$ , l'image de  $R$  par la projection sur  $d_2$  au centre  $P$  existe alors pour tout  $R \in d_1$ ,  $PR$  coupe  $d_2$ . Supposons que  $d_1 \not\parallel d_2$  alors soit  $e$  la parallèle à  $d_2$  passant par  $P$ . Alors  $e \not\parallel d_1$  sinon  $d_1 \parallel e \parallel d_2$ . Appelons alors  $Q$  l'intersection de  $d_1$  avec  $e$ . On a alors que la droite  $QP = e$  est parallèle à  $d_2$  (notez que  $Q \neq P$  puisque  $P \notin d_1$ ). Donc la projection de  $Q$  sur  $d_2$  au centre  $P$  n'est pas définie, puisque  $d_2 \cap PQ = \emptyset$ . Ainsi la supposition que  $d_1 \not\parallel d_2$  est fautive i.e.  $d_1 \parallel d_2$ .

- Si  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles, montrer que la projection de  $d_1$  sur  $d_2$  au centre  $P$  est une application linéaire affine, i.e. qu'elle préserve les rapports de longueurs.

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts de  $d_1$ , nous voulons comparer le rapport  $\frac{AB}{AC}$  au rapport  $\frac{A'B'}{A'C'}$  où  $A', B'$  et  $C'$  sont les images respectives de  $A, B$  et  $C$ . Puisque  $d_1 \parallel d_2$ , on a, par le théorème de Thalès:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ainsi:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \implies \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Ceci étant vrai pour tout triplet de points distincts  $A, B$  et  $C$  de  $d_1$ , la projection de  $d_1$  sur  $d_2$  au centre  $P$  est linéaire affine.

- Montrer que si  $d_1 \not\parallel d_2$ , la bijection est définie complètement si l'on étend les droites en des droites projectives.

Si  $d_1 \not\parallel d_2$ , on a trouvé un point  $R \in d_1$  dont la projection n'était pas définie et que, dans ce cas,  $PR \parallel d_2$ . Dans le plan projectif, l'intersection de  $PR$  et  $d_2$  existe, c'est la point à l'infini de  $d_2$ . En outre, si  $Q$  est le point à l'infini de  $d_1$  alors la droite  $PQ$  est la droite parallèle à  $d_1$  passant par  $P$ , elle intersecte nécessairement  $d_2$  (sinon  $d_2 \parallel d_1$ ) et donc l'application s'étend à de la droite projective  $d_1$  à la droite projective  $d_2$ .

Notez ensuite que notre application est encore une bijection: son inverse est la projection de  $d_2$  sur  $d_1$  au centre  $P$ . En effet étant donné un point  $X \in d_1$ , sa projection  $X'$  sur  $d_2$  au centre  $P$  est un point  $X'$  qui est l'intersection de  $PX$  avec  $d_2$ ; or la projection de  $X'$  sur  $d_1$  est l'intersection de  $PX'$  avec  $d_1$ , or  $PX' = PX$  par définition, donc cette projection est  $X$ . Ainsi la composée de ces deux projections donne l'identité. À vous de démontrer que la composition dans l'autre sens donne l'identité, cela nous montre que ce sont bien des bijections.

## EXERCICES 9 — CORRIGÉ

2. Trouvez l'inversion du point  $(-10, 15) \in \mathbb{R}^2$  par rapport à l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 16$ . (Indication : utilisez d'abord une application linéaire bijective qui envoie cet ellipse sur le cercle unité). Trouvez la polaire correspondant à  $(-10, 15)$ .

Afin de clarifier les notations (vous comprendrez pourquoi), il convient de noter  $(x', y')$  les coordonnées de l'image  $(x, y)$  par la transformation  $\varphi$  que nous voulons : on cherche une transformation  $\varphi : (x, y) \rightarrow (x', y')$  en sorte que  $(x, y) \in$  ellipse si et seulement si  $(x', y') \in$  au cercle unité. Intuitivement il faudrait multiplier  $x$  par 2,  $y$  par 5 puis multiplier les deux par 4. Essayons donc de poser  $(8 \cdot x', 20 \cdot y') = (x, y)$ . On obtient  $(x', y') = \varphi(x, y) = (\frac{1}{8} \cdot x, \frac{1}{20} \cdot y)$ .

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 16 \iff \frac{(8 \cdot x')^2}{4} + \frac{(20 \cdot y')^2}{25} = 16 \iff x'^2 + y'^2 = 1$$

Ainsi l'image par  $\varphi$  de l'ellipse est le cercle unité. Notons encore que  $\varphi(-10, 15) = (-\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$ . L'inversion de  $(-10, 15)$  autour de l'ellipse sera alors  $\varphi^{-1}$  de l'inversion de  $\varphi(-10, 15)$  par le cercle unité.

Ce dernier n'est autre que :

$$\frac{1}{(-\frac{5}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2} \cdot \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{16}{34} \cdot \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{10}{17}, \frac{6}{17}\right)$$

Ainsi l'inversion de  $(-10, 15)$  autour de l'ellipse n'est autre que  $\varphi^{-1}(\frac{10}{17}, \frac{6}{17})$  qui est :

$$\varphi^{-1}\left(\frac{10}{17}, \frac{6}{17}\right) = \left(8 \cdot \frac{10}{17}, 20 \cdot \frac{6}{17}\right) = \left(\frac{80}{17}, \frac{120}{17}\right)$$

Pour calculer la polaire, de ce point par rapport à l'ellipse, il suffit de trouver la droite perpendiculaire à la droite allant de  $(0, 0)$  à  $(-10, 15)$  (notez que cette droite contient l'image par l'inversion. Elle aura comme vecteur directeur  $(15, 10)$  un orthogonal à  $(-10, 15)$  et passera par l'image par l'inversion de  $(-10, 15)$ . Cela donne l'équation paramétrique :

$$(p): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{17} \\ \frac{120}{17} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. Soit  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  considéré intrinsèquement comme l'espace des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ . Montrez qu'une application  $f : \mathbb{P}^1\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R}$  est projective si et seulement si elle est induite par une application linéaire bijective de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

$\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  est l'ensemble des droites vectorielles (i.e. passant par  $(0, 0)$ ). On peut définir le birapport de tout quadruplet de points de  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ , il suffit pour cela de choisir une droite ne passant par l'origine qui croise les quatre droites vectorielles représentant les points (c'est toujours possible). Le birapport du quadruplet est alors le birapport dans la droite, notons que cela ne dépend pas de la droite choisie puisque le birapport est invariant par projection centrale.

Étant donné une application linéaire  $\varphi$ , donnée par une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , elle vaut :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Étant une application linéaire, elle va envoyer sous-espace vectoriel sur sous-espace vectoriel, mais pour pouvoir la passer au plan projectif il faut qu'elle envoie droite vectorielle sur droite vectorielle, ainsi elle ne doit envoyer aucun point, sauf le  $(0, 0)$ , sur  $(0, 0)$ . Il faut et il suffit donc qu'elle soit bijective, c'est-à-dire que son déterminant soit non-nul. Supposons que ce soit le cas, on peut alors poser :

$$\bar{\varphi} : \mathbb{P}^1\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

Il vous faut noter que le fait de l'application linéaire est très important ici (si l'on change l'expression de  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  par un multiple, on doit encore retomber sur un multiple).

Montrons donc que cette bijection préserve le birapport. Soient 4 points de  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  (donc des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ ) et soit  $d$  une droite coupant ces quatre droites vectorielles en 4 points. Si l'équation paramétrique de cette droite est

$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{alors } d' = \varphi(d) \text{ a l'équation paramétrique } (\varphi(d)): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \mu \cdot \varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Le birapport se mesure au moyen du  $\lambda$  de chaque point étant l'intersection des droites vectorielles et de  $d$ . Et  $\varphi$  envoie les droites vectorielles en multipliant par la matrice le vecteur directeur. Ainsi les intersections de ces droites vectorielles avec  $d'$  auront le même scalaire  $\mu = \lambda$  et donc le birapport est conservé.

Supposons maintenant que le birapport est conservé par une transformation quelconque  $\varphi: \mathbb{P}^1\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ . Choisissons trois points distincts de  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et nommons  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  leurs images par  $\varphi$ . On choisit un point non-nul dans chacune des droites vectorielles  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , disons:

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Alors on pose  $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 & \beta \cdot b_1 \\ \alpha \cdot a_2 & \beta \cdot b_2 \end{pmatrix}$  pour n'importe quels  $\alpha$  et  $\beta$  des réels non-nuls, alors on a:

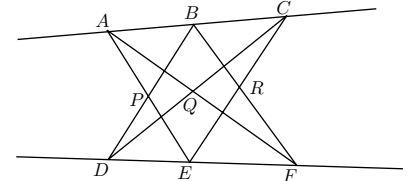
$$M_{\alpha,\beta} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{bmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_{\alpha,\beta} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \cdot b_1 \\ \beta \cdot b_2 \end{bmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il nous reste alors à trouver  $\alpha$  et  $\beta$  pour que ça coïncide aussi pour  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

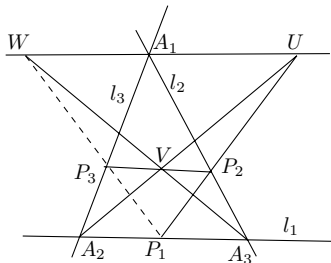
Il nous suffit de résoudre le système d'équation  $\begin{cases} c_1 = \alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \\ c_2 = \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \end{cases}$ . Or ceci est possible car les droites vectorielles  $A'$  et  $B'$  sont distinctes, donc les vecteurs  $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  sont linéairement indépendants. Ce système admet donc une solution  $\alpha$  et  $\beta$  (uniques) et l'on peut donc poser:  $\psi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_{\alpha,\beta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  qui nous donne une transformation de  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  qui préserve les birapports (comme nous l'avons montré au début) et qui coïncide avec  $\varphi$  sur trois points. On peut alors appliquer le lemme qui dit que d'une droite projective dans une droite projective, deux transformations préservant le birapport qui coïncident en trois points sont égales. On déduit donc que  $\varphi$  est induite par une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$ .

6. Montrer que le théorème de Désargues peut être considéré comme un cas dégéné du théorème de Pascal lorsque la conique du théorème de Pascal dégénère en deux droites distinctes.

Observons d'abord que le théorème de Pappus est une conséquence directe du théorème de Pascal sur une conique dégénérée en deux droites. Le théorème de Pappus affirme qu'étant donnés six points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  tels que  $A, B$  et  $C$  sont alignés sur une droite  $l$  et  $D, E$  et  $F$  sont alignés sur une droite  $m$  en sorte qu'aucun de ces six points n'est l'intersection de  $l$  et  $m$  alors les intersections  $P = AE \cap DB$ ,  $Q = AF \cap CD$  et  $R = BF \cap CE$  sont alignés. Il suffit, en effet de considérer la réunion des deux droites  $l \cup m$  comme une conique, l'hexagone  $AECDBF$  est inscrit dans celle-ci, donc les côtés opposés se rencontrent, ce qui donne le résultat désiré. Le fait que le théorème de Pappus implique celui de Désargues devrait être une chose connue. Pour la complétude, nous nous permettons de donner une preuve qui se fait en deux étapes:



**Perspectivismes Pappiens:** Si  $l_1, l_2$  et  $l_3$  sont trois droites ne concourant pas au même point et  $f: l_1 \rightarrow l_2$  la projection centrale de  $l_1$  sur  $l_2$  au centre  $U$ ,  $g: l_2 \rightarrow l_3$  la projection centrale  $l_2$  sur  $l_3$  au centre  $V$  en sorte que  $UV$  coupe  $l_1$  et  $l_3$  au même endroit alors il existe un point  $W$  tel que la composition  $f \circ g$  est la projection centrale de  $l_1$  sur  $l_3$  au centre  $W$ .



Posons  $A_1 = l_2 \cap l_3$ ,  $A_2 = l_1 \cap l_3$  et  $A_3 = l_1 \cap l_2$ , on peut décider alors que  $W$  est l'intersection  $UA_1 \cap VA_3$ . Pour tout point  $P_1$  sur  $l_1$ , appelons  $P_2 = f(P_1)$  et  $P_3 = g(P_2)$ . Nous pouvons alors appliquer le théorème de Pappus aux six points  $U, V, A_2$  et  $A_3, A_1$  et  $P_2$ . Il nous donne alors que  $W = UA_1 \cap VA_3$ ,  $P_1 = UP_2 \cap A_2A_3$  et  $P_3 = VP_2 \cap A_2A_1$  sont alignés. Ceci étant valable pour tout  $P_1$  distincts de  $A_2$  et  $A_3$  (mais pour ces deux cas, c'est évident), on a que  $P_1, f \circ g(P_1)$  et  $W$  sont toujours alignés, donc que  $f \circ g$  est la projection centrale de  $l_1$  sur  $l_3$  au centre  $W$ .



En fait, on peut montrer beaucoup plus fort à partir de Pappus, que toute projectivité entre deux droites distinctes est une projection centrale, nous ne le ferons pas (se reporter au rayon QA471 de la bibliothèque).

**Pappus  $\implies$  Désargues** Considérons deux triangles  $\triangle ABC$  et  $\triangle A'B'C'$  (avec  $A \neq A'$ ,  $B \neq B'$  et  $C \neq C'$ ) en sorte que  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  passent par le même point  $O$ . Alors  $C'' = AB \cap A'B'$ ,  $B'' = AC \cap A'C'$  et  $C'' = BC \cap B'C'$  sont alignés.

Appelons  $l_1 = AA'$ ,  $l_2 = BB'$  et  $l_3 = CC'$ . Considérons la projectivité  $\varphi$  qui est la composition de la projection de  $l_1$  sur  $l_2$  au centre  $C''$  suivie de la projection de  $l_2$  sur  $l_3$  au centre  $A''$ . Nous voudrions prouver que  $\varphi$  est la projection de  $l_1$  sur  $l_3$  au centre  $B''$ .

D'abord il est clair que  $O$  est sa propre image par  $\varphi$ . Il nous faut une petite modification avant d'appliquer le théorème précédent, puisque  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  coïncident en un point. Posons donc  $Q_1 = A''C'' \cap l_1$ ,  $Q_2 = A''C'' \cap l_2$ ,  $Q_3 = A''C'' \cap l_3$  et choisissons une troisième droite  $l'_1$  passant par  $Q_1$ . Posons encore  $O' = OA'' \cap l'_1$ ,  $B_1 = BC \cap l'_1$  et  $B'_1 = B'C' \cap l'_1$ . Nous pouvons alors exprimer  $f$  comme la composition des trois perspectives suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 l_1 & \xrightarrow{\text{centre } C''} & l_2 & \xrightarrow{\text{centre } A''} & l'_1 & \xrightarrow{\text{centre } A''} & l_3 \\
 A & \mapsto & B & \mapsto & B_1 & \mapsto & C \\
 A' & \mapsto & B' & \mapsto & B'_1 & \mapsto & C' \\
 Q_1 & \mapsto & Q_2 & \mapsto & Q_1 & \mapsto & Q_3 \\
 O & \mapsto & O & \mapsto & O' & \mapsto & O
 \end{array}$$

Or, par le théorème 2, la première composition est une projection centrale, puisque  $Q_1$  est envoyé sur lui-même. Ainsi toute la composition est une projection centrale puisque  $O$  est envoyé sur lui-même. Donc  $f$  est bien la projection centrale au centre  $B''$  (puisque elles coïncident sur au moins trois points), d'où  $B''$  est sur  $Q_1Q_3$  qui est  $A''C''$ . Donc  $A''$ ,  $B''$  et  $C''$  sont alignés.