Modeste construction de la K-théorie

Définition : Soit X un espace topologique, on note $\underline{\text{Vect}_n(X)}$ l'ensemble des clases d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes de rang n à base X et $\underline{\text{Vect}(X)}$ l'union des $\text{Vect}_n(X)$ pour $n \geq 0$.
$\text{Vect}(X)$ est muni d'une addition, la somme directe des deux fibrés. Cette opération est, on le sait, commutative, associative et admet le fibré nul comme élément neutre. $\text{Vect}(X)$ est donc un semi-groupe.

(Contre-)exemple : Cette opération n'est pas simplifiable comme le montre le petit exemple suivant : construisons $T\mathbb{S}^2 = \Big\{(x,v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \,|\, x \perp v\Big\}$, le fibré tangent à la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ et son fibré normal $N\mathbb{S}^2 = \Big\{(x,v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \,|\, x \text{ colinéaire à } v\Big\}$; ce dernier est trivial par l'homéomorphisme $(x,t) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \longmapsto (x, t{\cdot}x)$. Or la somme directe $N\mathbb{S}^2 \oplus T\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ par l'homéomorphisme $(x,v)\oplus(x,w) \longmapsto (x, v+w)$ ainsi :

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \oplus T\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \oplus \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$$

Alors que $T\mathbb{S}^2 \ncong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Sachant que nous voulons construire un groupe à partir de $\text{Vect}(X)$, nous serons contraints de ne pas différencier $T\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ par la K-théorie. Mais d'autre espoirs nous tiennent, passons à l'acte mortel pour ces différences.

Groupe d'un pseudo-groupe

Étant donné un semi-groupe commutatif F avec élément neutre 0, il existe, à isomorphisme près, un unique groupe, que nous noterons $\underline{\mathcal{G}F}$ et un unique morphisme de semi-groupe $\mathcal{G}_F \colon F \longrightarrow \mathcal{G}F$ tels que pour tout morphisme de semi-groupe $\varphi \colon F \longrightarrow G$ dans un groupe abélien G, il existe un unique morphisme de groupe $\mathcal{G}\varphi \colon \mathcal{G}F \longrightarrow G$ avec $\mathcal{G}\varphi \circ \mathcal{G}_F = \varphi$.

DEMO On considère l'opération composante par composante de somme dans $F \times F$, ce produit devient alors un semi-groupe que l'on quotiente par la diagonale $\Delta = \{(f,f) \,|\, f \in F\}$. Nous noterons au moyen d'un crochet les classes d'équivalences. Remarquons que $[f,f'] + [f',f] = [f+f', f+f'] = [0]$. Ainsi chaque élément a un opposé, on définit alors $\mathcal{G}F = F \times F/\Delta$ qui est donc bien un groupe, et l'on pose $\mathcal{G}_F(f) = [f,0]$.
Vérifions que le couple $(\mathcal{G}F, \mathcal{G}_F)$ satisfait à la propriété universelle : soit $\varphi \colon F \longrightarrow G$ un morphisme dans un groupe G, alors on pose $\mathcal{G}\varphi([f,f']) = \varphi(f) - \varphi(f')$, qui est bien définie puisque φ est un morphisme. Montrons que $\mathcal{G}\varphi$ est unique, supposons un autre morphisme $\Psi \colon \mathcal{G}F \longrightarrow G$ tel que $\Psi \circ \mathcal{G}_F = \varphi$, on a alors $\Psi([f,f']) = \Psi([f,0]) - \Psi([f',0]) = \varphi(f) - \varphi(f') = \mathcal{G}\varphi([f,0]) - \mathcal{G}\varphi([f',0]) = \mathcal{G}\varphi([f,f'])$.
De cette propriété universelle, on tire l'unicité à isomorphisme près : si $(G, \Psi \colon F \longrightarrow G)$ est une autre paire satisfaisant à la propriété universelle alors on a deux morphismes de groupes $\mathcal{G}_F \colon \mathcal{G}F \longrightarrow G$ et $G_F \colon G \longrightarrow \mathcal{G}F$; les compositions sont alors égales aux identités puisqu'elles font la même commutativité, donc $\mathcal{G}_F$ est un isomorphisme de groupe.

Définition : Pour un espace topologique compact Hausdorff X, on appelle *K-théorie de X* le groupe abélien $\mathcal{G}(Vect(X), \oplus)$, on la note $\underline{K(X)}$.

Description : On note $[n]$ pour la classe du fibré trivial de rang n et $[E]$ pour la classe de $[E,0]$. Soit $[E,F] \in K(X)$. Nous savons l'existence d'un fibré G tel que $F \oplus G$ est trivial, disons de rang n. Alors

$$[E,F] = [E] - [F] = [E] + [G] - [F \oplus G] = [E \oplus G] - [n]$$

Donc tout élément de $K(X)$ s'écrit comme différence entre la classe d'un fibré et et la classe d'un fibré trivial. Remarquons également que, si X est connexe, le rang des fibrés induit une "dimension" des éléments de $K(X)$ en posant $\underline{\dim [E,F]} = \text{rg}(E) - \text{rg}(F)$ qui est bien définie puisque la dimension de tout élément diagonal est nulle. Si X n'est pas connexe, la dimension est alors une application de l'ensemble des composantes connexes dans $\mathbb{Z}$.

PRODUIT : Le produit tensoriel de deux fibrés sur une même base X induit un produit sur $K(X)$ qui est associatif, distributif, commutatif et a le fibré trivial de rang 1 comme élément neutre. On pose $[E,F]\otimes[E',F'] := [E\otimes E' + F\otimes F', E'\otimes F + E\otimes F']$ qui étend par distributivité $[E]\otimes[F]=[E\otimes F]$.
Par cette distributivité, le produit est bien défini, toutes les bonnes propriétés du produit tensoriel passent donc à la K-théorie. L'élément neutre est [1]. Enfin notons que, si X est connexe :

$$\begin{aligned}\dim\,([E,F]\otimes[E',F']) &= \mathrm{rg}\ E\cdot \mathrm{rg}\ E' + \mathrm{rg}\ F\cdot\mathrm{rg}\ F' - \mathrm{rg}\ E'\cdot\mathrm{rg}\ F - \mathrm{rg}\ E\cdot\mathrm{rg}\ F'\\ &= \mathrm{rg}\ E\cdot\dim\,[E',F'] - \mathrm{rg}\ F\cdot\dim\,[E',F'] = \dim\,[E,F]\cdot\dim\,[E',F']\end{aligned}$$

FONCTORIALITÉ : Soit $f\colon X\longrightarrow Y$ une application continue, l'application $f^*\colon \mathrm{Vect}\ (Y)\longrightarrow \mathrm{Vect}\ (X)$ envoye produits tensoriels sur produits tensoriels et sommes directes sur sommes directes, est donc un morphisme de semi-groupe (additif et multiplicatif). Par la propriété universelle du groupe associé à un semi-groupe, f^* est vu comme un morphisme d'anneau $K(Y)\longrightarrow K(X)$.
Notons, en guise de première propriété, que le rappel préserve les rangs, donc la dimension, et envoye fibré trivial sur fibré trivial, i.e. $f^*([n])=[n]$.
Notre K est maintenant un foncteur contravariant de la catégorie TopCH des espaces topologiques compacts Hausdorff dans la catégorie des anneaux commutatifs.
Sachant que deux applications homotopes $X\longrightarrow Y$ définissent des fibrés isomorphes, la classe d'équivalence d'homotopie des applications continues entre deux espaces suffit à définir l'application induite. De plus si deux espaces sont équivalents homotopiquement disons via $f\colon X\longrightarrow Y$ et $g\colon Y\longrightarrow X$, inverses homotopiques. Alors $f\circ g\simeq Id_Y$ et $g\circ f\simeq Id_X$ d'où f^* et g^* induisent des morphismes inverses l'un de l'autre, on a donc $K(X)\cong K(Y)$. Le foncteur K peut donc être vu comme un foncteur de la catégorie des classes d'équivalences homotopiques d'éléments de TopCH.

K-THÉORIE RÉDUITE : Calculons d'abord la K-théorie d'un point : tout fibré y est trivial et donc $K(X)\cong\mathbb{Z}$ par l'isomorphisme canonique $[n]\longmapsto n$.
Nous considérons maintenant la catégorie TopCH^+ des espaces pointés (X,x_0) où $X\in\mathit{TopCH}$. Appelons $i\colon\ \{x_0\}\longrightarrow X$ l'inclusion, alors le rappel de tout fibré E sur X par i est le fibré trivial de même rang ; ainsi $i^*\colon K(X)\longrightarrow K(\{x_0\})$ n'est rien d'autre que la dimension de la classe. Nous pouvons alors poser $\underline{K(X,x_0)}:=\ker(K(X)\xrightarrow{i^*}K(\{x_0\})$, qui n'est rien d'autre que l'ensemble des classes de $K(X)$ de dimension zéro. Notons en outre que i^* admet une section : en appelant $c\colon X\longrightarrow\{x_0\}$ l'application constante, on a $c\circ i=Id_{\{x_0\}}$ et donc $i^*\circ c^*=Id_{K(\{x_0\})}$, donc on a un isomorphisme : $K(X)\cong K(X,x_0)\oplus K(\{x_0\})\cong K(X,x_0)\oplus\mathbb{Z}$ et tous ces isomorphismes sont naturels, puisque la dimension est préservée par les morphismes induits. Ainsi la K-théorie réduite est fonctorielle.

K-THÉORIE RELATIVE : Appelons TopCH^2 la catégorie des paires (X,Y) pou $X\subset Y$ tous deux dans TopCH (en particulier nous considérerons Y fermé). On admet les paires $(X,\emptyset)$. Pour toute paire (X,Y), le quotient X/Y est bien défini ; si $Y=\emptyset$ alors on admet la convention que $X/\emptyset = X\sqcup\{\emptyset\}$, la réunion disjointe de X et d'un point $\emptyset$. On définit alors la *K-théorie relative* de la paire (X,Y) de TopCH^2 par $\underline{K(X,Y)}=K(X/Y,Y)$. Notons que, puisque toute application continue entre paires induit une application canonique entre les quotients, la K-théorie relative est fonctorielle également.
Épluchons le cas d'une paire $(X,\emptyset)$: en appelant $i\colon\ \{\emptyset\}\longrightarrow X\sqcup\{\emptyset\}$ l'inclusion, on a, par définition, $K(X,\emptyset)=\ker(K(X\sqcup\{\emptyset\})\xrightarrow{i^*}K(\{\emptyset\})$, or i^* envoye E sur la restriction de E au dessus du point $\{\emptyset\}$ donc $K(X,\emptyset)\cong K(X)$ de manière naturelle.

Suite exacte de paire

Pour une paire (X,Y) de TopCH^2, appelons $j\colon\ (X,\emptyset)\longrightarrow(X,Y)$ l'inclusion et $i\colon\ (Y,\emptyset)\longrightarrow(X,\emptyset)$. On a alors la suite exacte de paire :

$$K(X,Y)\xrightarrow{j^*}K(X,\emptyset)\xrightarrow{i^*}K(Y,\emptyset)$$

DEMO La composition $i^*\circ j^*=(ji)^*$ est induite par l'inclusion $i\circ j\colon\ (Y,\emptyset)\longrightarrow(X,Y)$, c'est-à-dire, en passant aux quotients, $(Y\sqcup\{\emptyset\},\{\emptyset\})\longrightarrow(X/Y,Y)$ effondre Y et le point $\emptyset$ sur le point Y ; puisque tout fibré X/Y est localement trivial autour du point Y, son rappel sera trivial, de plus les dimensions sont toutes nulles, donc $i^*\circ j^*=0$. Ce qui signifie que $\mathrm{im}\, j^*\subset\ker i^*$.
Nous montrons l'inclusion inverse par une construction explicite. Soit $\xi=[E]-[n]$ un élément de $\ker i^*$, donc un élément de dimension 0. On a $i^*(\xi)=[i^*E]-[n]=[0]$, i .e. $[n]=[i^*E]$

dans $K(Y)$, or le rappel par une inclusion n'est autre que la restricition, $[E|Y] = [i^*E] = [n]$. Cela signifie qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $E|Y \oplus m$ est trivial, appelons $\alpha\colon E|Y \oplus m \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^m$ l'ismorphisme de fibré.

On peut alors quotienter le fibré E à base X en un fibré E/α à base X/Y au moyen de cette trivialisation. On rappelle que $E/\alpha = E/\sim$ où $v \sim w$ si $v = w$ ou si les projections $\pi(v)$ et $\pi(w)$ sont dans Y et que $pr_2 \circ \alpha(v) = pr_2 \circ \alpha(w)$; la projection est clairement définie, la trivialisation autour du point Y est obtenue en remarquant que toute trivialisation d'un fermé s'étend à son voisinage et canoniquement ailleurs.

Appelons $\eta = [E \oplus m/\alpha] - [n] - [m]$, c'est un élément de $K(X/Y)$ de dimension zéro, donc un élément de $K(X, Y)$. Mais alors $E \oplus m$ est le rappel de $E \oplus m/\alpha$ par l'application quotient $X \longrightarrow X/Y$. L'inclusion de la paire $(X, \emptyset) \longrightarrow (X, Y)$ induit par passage au quotient l'application de X sur X/Y et envoye $\emptyset$ sur Y ; E' est alors le rappel de $E \oplus m/\alpha$ par celle-ci. Ainsi $j^*(\eta) = [E \oplus m] - [n \oplus m] = [E] - [n] = \xi$.

Corollaire réduit

En utilisant la décomposition canonique en produit $K(X) \cong K(X, y_0) \oplus K(\{y_0\})$, on obtient la suite exacte :

$$K(X,Y) \xrightarrow{j^*} K(X,y_0) \oplus K(y_0) \xrightarrow{i^*} K(Y,y_0) \oplus K(\{y_0\})$$

Mais nous observons que j^* a toutes ses images de dimension zéro et que i^* envoye les éléments de dimension zéro dans ceux de dimension zéro. L'exactitude de la suite permet est alors équivalente à celle de :

$$K(X,Y) \xrightarrow{j^*} K(X,y_0) \xrightarrow{i^*} K(Y,y_0)$$

K-THÉORIE À SUPPORT COMPACT : Soit X un espace localement compact Hausdorff alors X admet un compactifié d'Alexandroff noté $X^+ := X \cup \{+\}$ où l'on a rajouté les ouverts $X \cup \{+\} \dot{-} C$ pour tout compact C de X ; alors X^+ est compact Hausdorff. Nous pouvons poser, si $i\colon \{+\} \longrightarrow X^+$ est l'inclusion,

$$\underline{K(X)} = \ker i^*$$

C'est-à-dire que $K(X)$ est formé des classes de fibrés "virtuels" sur X^+ qui sont stablement équivalents à $[0]$ en dehors d'un compact (i.e. autour de $+$). On remarquera sans doute que les classes de $K(X)$ ne contiennent pas tous les fibrés sur X.

$$\begin{tikzcd} \{+\} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, hook, "i_X"] & \{+\} \arrow[d, hook, "i_Y"] \\ X^+ \arrow[r, "f^+"] & Y^+ \end{tikzcd}$$

Nous voudrions que $K(X)$ soit fonctorielle, mais l'on sait qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux localement compacts ne s'étend continûment aux compactifications que si elle envoye "asymptotes" sur "asymptotes", plus précisément si elle est propre. Si tel est est le cas, on la diagramme commutatif ci-contre et l'on peut définir f^* comme la restriction de f^{+*} à $\ker i_Y^*$ qui arrive bien dans $\ker i_X^*$ puisque le diagramme induit commute.

$$\begin{tikzcd} K(\{+\}) & K(\{+\}) \arrow[l, "Id"'] \\ K(X^+) \arrow[u, "i_X^*"] & K(Y^+) \arrow[l, "f^{+*}"'] \arrow[u, "i_Y^*"] \end{tikzcd}$$

Nous appelerons ***TopLCH*** la catégorie des espaces localement compacts Hausdorff munis des applications propres.

PRODUIT CARRÉ : Soient X et Y dans ***TopCH***, on construit un produit dit *produit carré* parfois produit extérieur $\boxtimes\colon K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$ défini par $[E] \boxtimes [F] = [E \boxtimes F]$; où le produit carré $E \boxtimes F$de deux fibrés E sur X et F sur Y est un fibré sur $X \times Y$ dont la fibre en (x, y) est $E_x \otimes F_y$. Les trivialisations viennent de manière évidente comme produit tensoriel des trivialisations. Il est clair que ce produit est bilinéaire et donc passe bien au produit tensoriel des K-théories en tant que $\mathbb{Z}$-modules. Nous voulons maintenant étendre cette définition aux espaces localement compacts :

Lemme Si X et $Y \in$ *TopLCH* alors $\boxtimes\colon\ K(X^+) \otimes K(Y^+) \longrightarrow K(X^+ \times Y^+)$ induit un produit carré $\boxtimes\colon\ K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$

DEMO Nous montrons d'abord que $K(X^+ \times Y^+)$ se décompose en $K((X \times Y)^+, +) \oplus K(X^+, +) \oplus K(Y^+, +)$, pour cela nous appliquons la suite exacte de paire :

$$K(X^+ \times Y^+, X^+ \times \{+\}) \xrightarrow{q^*} K(X^+ \times Y^+, (+,+)) \xrightarrow{i_X^*} K(X^+ \times \{+\}, (+,+))$$

où $q\colon\ X^+ \times Y^+ \longrightarrow X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}$ est l'application quotient et $i\colon\ X^+ \times \{+\} \longrightarrow X^+ \times Y^+$ est l'inclusion canonique. Observons alors que nous avons la section :

$s\colon\ X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \longrightarrow X^+ \times Y^+$ donnée par $(x,y) \mapsto (x,y) \quad X^+ \times \{+\} \mapsto (+,+) \quad (+,y) \mapsto (+,y)$

qui est bien continue (on le vérifie à la main dans le voisinage de chacun des cas) ; de même on a la rétraction donnée par l'écroulement de Y sur le $+$, $r\colon\ X^+ \times Y^+ \longrightarrow X^+ \times \{+\}$.
Ainsi la suite exacte en K-théorie est scindée et l'on a donc l'isomorphisme naturel suivant : $K(X^+ \times Y^+, (+,+)) \cong K(X^+ \times Y^+, X^+ \times \{+\}) \oplus K(X^+, +)$.
Décomposons alors $K(X^+ \times Y^+, X^+ \times \{+\})$ avec la paire $(X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}, \{+\} \times Y^+)$:

$$K(X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}, \{+\} \times Y^+) \xrightarrow{q_Y^*} K(X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}, (+,+)) \xrightarrow{j_Y^*} K(\{+\} \times Y^+, (+,+))$$

où $q_Y\colon\ X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \longrightarrow X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \cup \{+\} \times Y^+$ est le quotient et l'application $j_Y\colon\ \{+\} \times Y^+ \longrightarrow X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}$ est l'inclusion. Encore une fois, nous avons une rétraction et une section : $r_Y\colon\ X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \cup \times \{+\} \times Y^+ \longrightarrow X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}$ définie par $(x,y) \mapsto (x,y)$ et $X^+ \times \{+\} \cup \{+\} \times Y^+ \mapsto X^+ \times \{+\}$; cette rétraction est continue, comme on peut le vérifier au cas par cas. De même la section $s_Y\colon\ X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \longrightarrow \{+\} \times Y^+$ est l'écroulement. On a donc :

$$\rho_Y^* \oplus j_Y^*\colon\ K(X^+ \times Y^+, X^+ \times \{+\}) \xrightarrow{\sim} K(X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}, \{+\} \times Y^+) \oplus K(Y^+ . +)$$

Mais $K(X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\}, \{+\} \times Y^+) = K(X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \cup \{+\} \times Y^+,\ X^+ \times \{+\} \cup \{+\} \times Y^+)$ qui est naturellement isomorphe à $K((X \times Y)^+, +)$ puisque $X^+ \times Y^+/X^+ \times \{+\} \cup \{+\} \times Y^+$ est naturellement homéomorphe à $(X \times Y)^+$. Ainsi :

$$(r_Y^* \oplus j_Y^*) \circ r_X^* \oplus j_X^*\colon\ K(X^+ \times Y^+, (+,+)) \xrightarrow{\sim} (K((X \times Y)^+, +) \oplus K(Y^+, +)) \oplus K(X^+, +)$$

On remarque enfin que $s_X \circ j_Y$ est l'inclusion de Y^+ dans $(X \times Y)^+$ que nous appellerons i_Y.

Ainsi, étant donné $\xi \in K(X) = K(X^+, +)$ et $\upsilon \in K(Y) = K(Y^+, +)$, on a que $\xi \boxtimes \upsilon$ est dans $K(X^+ \times Y^+, (+,+))$ mais de plus que $i_X^*(\xi \boxtimes \upsilon) = \xi \boxtimes \upsilon|_{X^+ \times \{+\}} = \xi \otimes [0] = 0$ et de même $i_Y^*(\xi \boxtimes \upsilon) = 0$ ainsi, on peut dire que $\xi \boxtimes \upsilon \in K(X \times Y) = K((X \times Y)^+, +)$.

2. Familles d'opérateurs de Fredholm

On considère un espace de Hilbert H et $\mathcal{F}$ le semi-groupe des opérateurs de Fredholm $H \longrightarrow H$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des opérateurs continus de H ; $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ sont munis de la norme opérateur.

Lemme Soit $T \in \mathcal{F}$ et V un sous-espace vectoriel fermé de H de codimension finie tel que $V \cap \ker T = \{0\}$. Alors il existe un voisinage U de T dans $\mathcal{B}$ tel que $\forall S \in U$:
(1) $V \cap \ker S = \{0\}$
(2) $\bigcup_{S\in U} \{S\} \times {}^{H}/_{S(V)}$, muni de la topologie obtenue par quotient de $U \times H$ est un fibré trivial sur U.

DEMO Appelons $W = T(V)^{\perp}$ de dimension finie ; posons $\forall S \in \mathcal{B}$:

$$\varphi_S \colon V \oplus W \longrightarrow H \quad v \oplus w \longmapsto S(v) + w$$

alors $S \longmapsto \varphi_S$ est clairement continue $\mathcal{B} \longrightarrow C(V \oplus W, H)$, l'espace des applications linéaires continues $V \oplus W \longrightarrow H$ muni de la norme opérateur. Mais φ_T est un isomorphisme puisque $T|_V^{T(V)}$ en est un. Donc il existe un voisinage U de T en sorte que $\forall S \in U$, φ_S soit un isomorphisme. Alors clairement, $\forall S \in U$ on a $V \cap \ker S = \{0\}$ et $\cup_{S\in U} \{S\} \times H/S(V)$ est homéomorphe à $U \times W$ par $(S, h + S(V)) \longmapsto (S, pr_W(\varphi_S^{-1}(h)))$.

Corollaire $\mathcal{F}$ est ouvert dans $\mathcal{B}$. Il suffit d'utiliser le lemme ci-dessus avec $V = \ker T^{\perp}$.

Fibré d'indice Soit X un espace compact et $T \colon X \longrightarrow \mathcal{F}$ une application continue. Alors il existe un sous-espace vectoriel V de H fermé et de codimension finie tel que $V \cap \ker T_x = \{0\}$ pour tout $x \in X$.
De plus pour tout tel V, l'espace $\cup_{x\in X} \{x\} \times H/T_xV$ muni de la topologie quotient de la projection depuis $X \times H$ est un fibré vectoriel sur X.

DEMO Pour $x \in X$, on pose $V_x = (\ker T_x)^{\perp}$, le lemme précédent nous fournit alors un voisinage U'_x de T_x avec $V_x \cap \ker T_y = \{0\}$, on pose $U_x = T^{-1}(U'_x)$. Cela nous donne un recouvrement de X par $(U_x)_{x\in X}$ dont on extrait un recouvrement fini $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$; on pose alors $V = \cap V_{x_i}$ qui est encore de codimension finie, le sous-espace cherché puisque $V \cap \ker T_x = \{0\}$ $\forall x \in X$.
Soit maintenant un tel V ; puisque $\ker T_x \cap V = \{0\}$, le lemme nous donne alors une trivialisation $\varphi_i \colon \cup_{S\in U'_{x_i}} \{S\} \times H/S(V) \longrightarrow U_{x_i} \times H/T_{x_i}(V)$. On peut alors trivialiser $\cup_{x\in U_{x_i}} \{x\} \times H/T_x(V)$ en posant :

$$(x, h + T_xV) \longmapsto (x, \varphi_i(T_x, h + T_xV))$$

INDICE K : Notons $H/T(V)$ le fibré ainsi obtenu, on définit alors l'indice de T comme :

$$\underline{\text{ind } T} = [X \times {}^{H}/_{V}] - [{}^{H}/_{T(V)}] \in K(X)$$

Prouvons qu'il ne dépend pas du choix de V : si W est un autre choix (de sous-espace de codimension finie d'intersection nulle avec $\ker T_x$, $\forall x \in X$) alors $V \cap W$ est encore un candidat, nous pouvons donc supposer que $W \subset V$ pour prouver notre invariance ; on a alors les suites exactes de fibrés :

$$0 \longrightarrow X \times {}^{V}/_{W} \longrightarrow X \times {}^{H}/_{W} \to X \times {}^{H}/_{V} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow X \times {}^{V}/_{W} \xrightarrow{Id \times T} {}^{H}/_{T(W)} \longrightarrow {}^{H}/_{T(V)} \longrightarrow 0$$

En rappelant que tout fibré sur une base paracompacte admet une forme hermitienne et donc que toute suite exacte de fibré sur un tel espace se scinde, on a l'additivité :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F \cong E \oplus G \Longrightarrow [F] = [E] + [G]$$

Dans notre cas donc :

$$[X\times {}^{H}/_{W}]-[{}^{H}/_{T(W)}]=[X\times {}^{H}/_{V}]-[{}^{H}/_{T(V)}]+[X\times {}^{V}/_{W}]-[X\times {}^{V}/_{W}]$$

d'où l'égalité des indices.

Montrons que ce K-indice est fonctoriel : si $f\colon X\longrightarrow Y$, on a alors que pour chaque $T\colon Y\longrightarrow \mathcal{F}$, si V est un bon candidat pour T, il l'est pour $T\circ f\colon X\longrightarrow \mathcal{F}$. Alors, clairement le fibré $\cup_{x\in X}\{x\}\times H/T_{f(x)}(V)$ est le pullback de $\cup_{y\in Y}\{y\}\times H/T_y(V)$ le long de f. On a donc que ind $T\circ f=f^*$ind T.

Remarquons enfin que pour une homotopie $T\colon X\times I\longrightarrow \mathcal{F}$ entre deux applications T_0 et $T_1\in C(X,\mathcal{F})$, les inclusions $i_k\colon X\times\{j\}\longrightarrow X\times I$ donnent des morphismes $K(X\times I)\xrightarrow{i_k^*}K(X\times\{k\})\cong K(X)$ d'où :

$$\text{ind } T_0=i_0^*\text{ind } T=i_1^*\text{ind } T=\text{ind } T_1$$

Ainsi l'indice se définit sur les classes d'homotopies d'applications $X\longrightarrow \mathcal{F}$, on peut donc poser :

$$\text{ind }:\ [X,\mathcal{F}]\longrightarrow K(X)$$

K-INDICE MORPHISME : Soient T et $S\colon X\longrightarrow \mathcal{F}$ deux applications continues et soit $W\subset H$ un bon choix de sous-espace vectoriel pour T. En appelant π_W la projection orthogonale sur W, on remarque que $\pi_W\circ S$ est homotope à S dans $\mathcal{F}$ puisque W est de codimension finie, on peut donc supposer que $S(H)\subset W$. Prenons alors un bon sous-espace vectoriel V pour S, c'est également un bon choix pour $T\circ S$ puisque $\ker T\circ S=S^{-1}(\ker T)=\ker S$. On a alors la suite exacte de fibrés :

$$0\longrightarrow {}^{W}/_{S(V)}\xrightarrow{Id\times T}{}^{H}/_{T\circ S(V)}\longrightarrow {}^{H}/_{T(W)}\longrightarrow 0$$

D'où :

$$\begin{aligned}\text{ind } T\circ S&=[X\times H/V]-[H/T\circ S(V)]=[X\times H/V]-[W/S(V)]-[H/T(W)]\\&=[X\times H/V]-[H/S(V)]+[X\times H/W]-[H/T(W)]=\text{ind } S+\text{ind } T\end{aligned}$$

Nous venons donc de prouver que l'indice est un morphisme de $([X,\mathcal{F}],\circ)$ dans $K(X)$.

Surjectivitédu K-indice

Le morphisme ind : $[X,\mathcal{F}]\longrightarrow K(X)$ est surjectif.

DEMO Soit $\xi\in K(X)$, alors $\xi=[k]-[E]$ (par un raisonnement très similiaire à l'autre sens). Nous voulons trouver un opérateur de Fredholm en sorte que son indice soit $[k]-[E]$.

En choisissant une base $<e_1,e_2,\dots>$ de H, on définit, pour $k\in\mathbb{Z}$, T_k, l'opérateur de décalage à gauche d'indice k, par :

$$T_k(e_i)=\begin{cases}e_{i-k} & \text{si } i\geq k\\ 0 & \text{si } i<k\end{cases}$$

On a facilement les propriétés suivantes :

$$\ker T_k=\begin{cases}0 & \text{si } k\leq 0\\ <e_0,\dots,e_{k-1}> & \text{si } k>0\end{cases}\quad\text{et}\quad \operatorname{im} T_k=\begin{cases}H & \text{si } k\geq 0\\ <e_{-k},e_{-k+1},\dots> & \text{si } k<0\end{cases}$$

D'où :

$$\text{indice }(T_k)=\dim\ \ker T_k-\text{codim }\operatorname{im} T_k=\begin{cases}k & \text{si } k\leq 0\\ k & \text{si } k\geq 0\end{cases}=k$$

Montrons alors que l'indice K de l'application constante $\bar{T}_k\colon x\longmapsto T_k$ est $[k]$. par Si $k\geq 0$, le sous-espace $V=<e_k,e_{k+1},\dots>$ est un bon choix pour T_k donc son fibré d'indice est : $[X\times H/V]-[H/\bar{T}_k(V)]=[k]-[0]=[k]$. Si $k<0$, T_k est injective et son indice est donc $[X\times H/H]-[H/\bar{T}_k(H)]=[0]-[X\times H/T_k(H)]=-[|k|]=[k]$.

Trouvons maintenant une famille d'opérateurs $x\longmapsto S_x$ en sorte que ind $S=-[E]$ pour un fibré E sur X. Soit F un complémentaire de E, i.e. tel que $E\oplus F\cong X\times V$, nous considérons les fibres E_x et F_x comme des sous-espaces de V et l'on définit π_x la projection de V sur E_x le long de F_x et κ_x la projection complémentaire (i.e. sur F_x le long de E_x, $\kappa_x=Id-\pi_x$).
Remarquons que H est isomorphe à $H\otimes V$, appelons $i\colon H\longrightarrow H\otimes V$ l'isomorphisme continu.
On définit alors l'opérateur :

$$S'_x=T_{-1}\otimes\pi_x+Id\otimes\kappa_x$$

$$S'_x\left(\sum_{i=0}^{k} e_i \otimes v_i\right) = \sum_{i=0}^{k} e_{i+1} \otimes \pi_x v_i + e_i \otimes \kappa_x v_i$$
$$= e_0 \otimes \kappa_x v_0 + \sum_{i=1}^{k} e_i \otimes (\pi_x v_{i-1} + \kappa_x v_i) + e_{k+1} \otimes \pi_x v_k$$

Alors S'_x est injective puisque:

$S'_x(\sum e_i \otimes v_i) = 0 \implies \kappa_x v_0 = 0,\ \pi_x v_k = 0$ et $\pi_x v_{i-1} + \kappa_x v_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, k \implies v_i = 0\ \forall i$

Remarquons également que $\{e_0\} \otimes \pi_x V = \{e_0\} \otimes E_x$ ne coupe $\mathrm{im}(S'_x)$ qu'en $\{0\}$ et que pour chaque $\sum_{i=0}^{k} e_i \otimes v_i \in H \otimes V$ avec $\pi_x v_0 = 0$, on a:

$$S'_x\left(e_0 \otimes (v_0 + \pi_x v_1) + \sum_{i=1}^{k-1} e_i \otimes (\pi_x v_{i+1} + \kappa_x v_i) + e_k \otimes \kappa_x v_k\right) =$$
$$e_0 \otimes v_0 + e_1 \otimes \pi_x v_1 + \sum_{i=1}^{k-1} e_{i+1} \otimes \pi_x v_{i+1} + \sum_{i=1}^{k-1} e_i \otimes \kappa_x v_i + e_k \otimes \kappa_x v_k = \sum_{i=0}^{k} e_i \otimes v_i$$

On vient donc de prouver que $\mathrm{im}\, S'_x = \{\sum e_i \otimes v_i \,|\, \pi_x v_0 = 0\}$ et donc l'application:

$$h_x\colon\ H \otimes V \longrightarrow H \otimes V \qquad \sum e_i \otimes v_i \longmapsto \pi_x(v_0)$$

qui est de noyau $\mathrm{im}\, S'_x$, est un isomorphisme, $H \otimes V / S(H \otimes V) \longrightarrow E_x$.

Nous avons montré que S'_x est Fredholm, remarquons que S'_x est continue (puisque somme de produits tensoriels d'applications continues) et donc que $S_x = i^{-1} \circ S'_x \circ i$ est continue et Fredholm également et l'on a encore $H/S(H) \cong E$, d'où:

$$\mathrm{ind}\, S_x = [H/H] - [H/S(H)] = [0] - [E] = -[E] \qquad \text{alors } \mathrm{ind}\, T_k \circ S_x = \mathrm{ind}\, T_k + \mathrm{ind}\, S_x = [k] - [E] = \xi$$

Ceci étant fait pour n'importe quel $\xi \in K(X)$, on conclut que l'indice est surjectif.

Proposition

En appelant $\mathcal{B}^*$ le sous-groupe des endomorphismes bijectifs de H, on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow [X, \mathcal{B}^*] \longrightarrow [X, \mathcal{F}\,] \xrightarrow{\mathrm{ind}} K(X) \longrightarrow 0$$

DEMO L'injection est claire, la surjection vient d'être montrée, de plus, l'indice d'une famille d'opérateurs inversibles est évidemment le fibré nul; il nous reste à montrer que $\ker(\mathrm{ind}\,) \subset [X, \mathcal{B}^*]$. Soit $T\colon X \longrightarrow \mathcal{F}$ une famille telle que $\mathrm{ind}\,(T) = [0]$.

Si V est un bon sous-espace de H pour T, on a donc: $[0] = [X \times H/V] - [H/T(V)]$, i.e. $[X \times H/V] = [H/T(V)]$, ce qui revient à dire qu'il existe un espace vectoriel P en sorte que $X \times H/V \oplus P \cong H/T(V) \oplus P$. Or si $W \subset V$ est un sous-espace tel que $V/W \cong P$ (donc W est de codimension finie), on a que $X \times H/V \oplus P \cong X \times H/W$ et, pour $x \in X$:

$$0 \longrightarrow X \times V/W \xrightarrow{Id \times T} H/T(W) \longrightarrow H/T(V) \longrightarrow 0$$

donc $H/T(W) \cong H/T(V) \oplus X \times V/W \cong H/T(V) \oplus P$ qui est isomorphe à $X \times H/W$.

De nouveau, on a la suite exacte suivante, dont on a choisi un scindement φ:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \times W \arrow[r] & X \times H \arrow[r] & H/T(W) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
 & & & X \times H/W \arrow[ul, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

où i est l'isomorphisme obtenu. Appelons alors $\Phi\colon X \longrightarrow \mathcal{L}(H/W,\ H)$ l'application continue associée, i.e. telle que $\varphi(x, h + W) = (x, \Phi_x(h + W))$. Remarquons que $\forall x \in X$, l'application:

$$R_x\colon\ H \xrightarrow{\sim} W \oplus H/W \xrightarrow{T_x \oplus \Phi_x} H$$

est alors un isomorphisme puisque Φ_x est une section (terminale) de

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{T_x} H \longrightarrow H/T_xW \longrightarrow 0$$

Donc l'application $x \longmapsto R_x$ est une application continue $X \longrightarrow \mathcal{B}^*$ qui est homotope à $x \longmapsto T_x$ par l'homotopie $(t,x) \longmapsto T_x + t \cdot \Phi_x$.
Nous venons donc de montrer que si ind $T = [0]$, T est homotope à une application dans $\mathcal{B}^*$, la suite est donc bien exacte.

Théorème de Kuiper

$\mathcal{B}^*$ est contractile.

DEMO Nous ne prouverons pas ce théorème, la preuve de Nicolaas Kuiper est très simple : N. Kuiper, *The Homotopy Type of the Unitary Group of Hilbert Space*, Topology Vol. 3, pp. 19-30, 1965.

Corollaire

Pour tout $X \in \mathit{TopCH}$ et tout espace de Hilbert H de dimension dénombrable et non finie, on a isomorphisme $[X, \mathcal{F}(H)] \xrightarrow{\text{ind}} K(X)$.

3. Opérateurs de Wiener-Hopf

Nous voulons, dans ce chapitre procéder à la construction d'un morphisme $\alpha_X\colon K(\mathbb{S}^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ qui réalisera l'homomorphisme de Bott. Le gros du travail consiste à construire ce morphisme au moyen de familles d'opérateurs dits de Wiener-Hopf. La preuve du théorème de périodicité de Bott (qui dit que $\alpha_X\colon K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ est un ismorphisme) sera très facile dès que nous saurons comment construire α_X et qu'il satisfait aux bonnes propriétés.
En gros, la composition qui définira α_X se définira comme suit :

$$E \in \text{Vect}\ (\mathbb{S}^2 \times X) \xmapsto{\delta} (D, f) \in PC(X) \xmapsto{Wiener-Hopf} F \in \Gamma(\mathsf{F}(H_0(E))) \xmapsto{\text{Ind}} K(X)$$

Nous procédons dans l'ordre des étapes.
Définition : Soit $X \in \mathsf{TopCH}$, on appelle l'ensemble des <u>*paires de collages de* X</u> l'ensemble suivant :

$$\underline{PC(X)} = \Big\{(E, f) \,|\, E \in \text{Vect}\ X \text{ et } f\colon \mathbb{S}^1 \times X \xrightarrow[X]{} GL(E)\Big\}$$

Remarquez la notation que nous adopterons désormais, nous mentionnons l'espace de base en dessous de la flèche d'une application pour indiquer que l'application est un morphisme de fibrés (topologiques), i.e. qu'elle préserve les points de base.

Décollage : Soit E un fibré sur $\mathbb{S}^2 \times X$, pour $X \in \mathsf{TopCH}$; nous lui associons une paire de collage $\delta(E) = (V, f)$ de la façon suivante :
On considère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la compactification d'Alexandroff de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ comme l'équateur. On nomme alors $B_0 = \Big\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\Big\}$ et $B_\infty = \{\infty\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq 1\Big\}$.
Si l'on choisit $V = E|_{\{0\}\times X} \in \text{Vect}\ X$, nous remarquons les deux faits suivants :

- Il existe un isomorphisme $\eta_0\colon B_0 \times V \xrightarrow[B_0 \times X]{} E|_{B_0\times X}$. En effet, appelant $i_0\colon X \longrightarrow B_0 \times X$ l'inclusion en $\{0\} \times X$, qui est une équivalence d'homotopie, nous avons : $i_0^*(B_0 \times V) = V = i_0^*(E|_{B_0\times X})$ donc que $B_0 \times V = E|_{B_0\times V}$ dans Vect $(B_0 \times X)$.
- Il existe un isomorphisme $\eta_\infty\colon B_\infty \times V \xrightarrow[B_\infty \times X]{} E|_{B_\infty\times X}$ pour des raisons très très similaires.

En se restreignant au cercle, on obtient que $\forall x \in X$ et $z \in S^1$:

$$\{z\} \times V_x \xrightarrow{\eta_0} E|_{(z,x)} \xrightarrow{\eta_\infty} \{z\} \times V_x \text{ donc un ismorphisme } f(z, x)\colon V_x \longrightarrow V_x$$

L'application $f\colon \mathbb{S}^1 \times X \xrightarrow[X]{} GL(V)$ est alors bien un continue.
On a alors un isomorphisme : $B_0 \times V \cup_f B_\infty \times V$ avec E donné par :

$$v \in B_0 \times V \longmapsto \eta_0(v), \quad v \in B_\infty \times V \longmapsto \eta_\infty(v)$$

Nous n'en aurons pas besoin mais il est intéressant de noter que la démarche inverse fonctionne (partir d'une paire de collage et obtenir un fibré sur $\mathbb{S}^2 \times X$). On appelle $\delta\colon \text{Vect}\ (X) \longrightarrow PC(X)$ l'application que nous avons construite. Les propriétés élémentaires du collage de deux fibrés nous fournissent alors les transparences suivantes :

1) Le choix des η's n'influencent f qu'à homotopie près. On définira donc $\delta\colon \text{Vect}\ X \longrightarrow PC_H(X)$ où $PC_H(X)$ est l'ensemble des paires collages où f est à homotopie près.
2) Si E et $F \in \text{Vect}\ \mathbb{S}^2 \times X$ alors :

$$\delta(E \oplus F) = \delta(E) \oplus \delta(F) \quad \text{ et } \quad \delta(E \otimes F) = \delta(E) \otimes \delta(F)$$

Cela en définissant la somme de deux paires $(D, f) \oplus (C, g) := (D \oplus C, f \oplus g)$ et le produit $(D, f) \otimes (C, g) = (D \otimes C, f \otimes g)$.

Notations : Soit $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ l'espace des classes de fonctions L^2 entre ces deux espaces, nous l'écrirons H puisqu'il est muni d'un produit scalaire $<\varphi, \Psi> = \int \varphi(z) \cdot \bar{\Psi}(z) \cdot dz$ qui en fait un espace de Hilbert.
Nous nommerons H_0 le sous-espace de H étant l'adhérence de l'ensemble des polynômes dans H, autrement dit H_0 est l'ensemble des fonctions exprimables en série de Fourier dont les coefficients de degré négatif sont nuls. On nomme encore $P\colon H \longrightarrow H_0$ la projection orthogonale, autrement dit la troncature de la partie de degré négatif.

Wiener-Hopf unidimensionnel

Soit $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*)$, on lui associe un opérateur $O(f) := F\colon H_0 \to H_0$ défini par $F(\varphi) = P(z \longmapsto f(z) \cdot \varphi(z))$. C'est clairement opérateur linéaire, nous montrons qu'il est Fredholm.

DEMO Notons, comme d'habitude $\mathcal{F}(H_0)$ l'espace des opérateurs de Fredholm de H_0, $\mathcal{B}(H_0)$ les continues et $\mathcal{K}(H_0)$ les compacts.

Remarquons que nous avons clairement $||F|| \leq |\sup f(z)|$, donc que $F \in \mathcal{B}(H_0)$ et que l'application $O\colon C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{B}(H_0)$ est continue. Nous considérons le quotient $\mathcal{Q} = \mathcal{B}(H_0)/\mathcal{K}(H_0)$ muni de la topologie quotient et appelons $\bar{O}\colon C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{Q}$ l'application induite. Montrons d'abord que $\bar{O}$ est un morphisme.

Si f, et $g \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*)$ sont des polynômes finis: $f(z) = \sum_{k=-n}^{n} f_k \cdot z^k$ et $g(z) = \sum_{k=-n}^{n} g_k \cdot z^k$, alors, $m \geq 2 \cdot n$:

$$O(f \cdot g)(z \mapsto z^m) = P\left(z \mapsto f(z) \cdot g(z) \cdot z^m\right) = P\left(z \mapsto \sum_{k=-2\cdot n}^{2\cdot n}\left(\sum_{i+j=k} f_i \cdot g_j\right) \cdot z^{k+m}\right) = \sum_{k=-2\cdot n}^{2\cdot n}\sum_{i+j=k} f_i \cdot g_j \cdot z^{k+m}$$

$$O(f) \circ O(g)(z \mapsto z^m) = O(f) \circ P\left(z \mapsto \sum_{k=-n}^{n} g_k \cdot z^{k+m}\right) = O(f)\left(z \mapsto \sum_{k=-n}^{n} g_k \cdot z^{k+m}\right)$$

$$= P\left(z \mapsto \sum_{k=-2\cdot n}^{2\cdot n}\sum_{i+j=k} g_i \cdot f_j \cdot z^{k+m}\right) = \sum_{k=-2\cdot n}^{2\cdot n}\sum_{i+j=k} g_i \cdot f_j \cdot z^{k+m}$$

Ainsi $O(f) \circ O(g) = O(f \cdot g)$ sur un espace de codimension finie, ce qui signifie que $\bar{O}(f) \circ \bar{O}(g) = \bar{O}(f \cdot g)$ dans le quotient $\mathcal{Q}$. Ainsi $\bar{O}$ est une application continue qui est un morphisme sur un sous-espace dense de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*)$, c'est donc globalement un morphisme.

Or pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*)$ il existe un inverse multiplicatif $1/f$, donc $\bar{O}(f)$ est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{Q}$, donc $O(f)$ admet un inverse modulo $\mathcal{K}$, ce qui signifie qu'il est Fredholm.

Notre O est donc une application continue $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{F}(H_0)$.

MULTIDIMENSIONNEL : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque muni d'un produit scalaire. On appelle $H(V)$ l'espace des classes de fonctions L^2 de $\mathbb{S}^1$ dans V, autrement dit, H est l'ensemble des classes de fonctions $\varphi\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow V$ dont chaque composante (dans une base donnée) est une fonction de $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$; c'est un espace de Hilbert par le produit scalaire $< \varphi, \Psi >= \int < \varphi(z), \Psi(z) > dz$.

Appelons $H_0(V)$ le sous-espace vectoriel qui est l'adhérence de l'ensemble des fonctions $\varphi(z) = \sum \varphi_i(z) \cdot v_i$ pour des fonctions polynômiales φ_i ; autrement dit, $H_0(V)$ est l'ensemble des fonctions dont les composantes (dans une base) a ses coefficients de Fourier nuls en degré négatif. On nomme alors $P_V\colon H(V) \longrightarrow H_0(V)$ la projection orthogonale. Nous remarquons que P_V est continue et que la topologie sur $H(V)$ ne dépend pas de la métrique sur V puisque chaque changement de métrique induit un isomorphisme bi-Lipschitz.

Par commodité, exprimons $P_V(\varphi)$ en fonction des $P(\varphi_i)$ si $\varphi(z) = \sum \varphi_i(z) \cdot v_i$, supposons que les φ_i s'expriment ont un développement de Fourier fini: $\varphi_i(z) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_{ik} \cdot z^k$. Alors

$$P_V(\varphi_i \cdot v_i) = \sum_{k=-n}^{n} P_V\left(z \mapsto \varphi_{ik} \cdot z^k\right) = \sum_{k=-n}^{n} = \sum_{k=0}^{n}(z \mapsto \varphi_{ik} \cdot z^k \cdot v_i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(z \mapsto \varphi_{ik} \cdot z^k) \cdot v_i + \sum_{k=-n}^{-1} P(z \mapsto \varphi_{ik} \cdot z^k) \cdot v_i = P\left(z \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \varphi_{ik} \cdot z^k\right) \cdot v_i = P(\varphi_i) \cdot v_i$$

Donc $P_V\left(\sum_i \varphi_i \cdot v_i\right) = \sum_i P(\varphi_i) \cdot v_i$.

Wiener-Hopf Multidimensionnel

Soit $(V, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow GL(V)$ une application continue alors l'opérateur $F := O_V(f)\colon H_0(V) \longrightarrow H_0(V)$ défini par $F(\varphi) = P_V(z \mapsto f(z)\cdot\varphi(z))$ est Fredholm et dépend continûment de f.

DEMO En fait, il faut refaire la même preuve que précédemment. Soient B, F et K les opérateurs continus, Fredholm et compacts de $H_0(V) \longrightarrow H_0(V)$ et soit Q le quotient B/K.

Prenons $< e_i >$ une base de V. Supposons que $f_{lc}(z) = \sum_{k=-n}^{n} f_{lc}^k \cdot z^k$ et que $\varphi(z) = \sum_i \left(\sum_{k=n}^{N} \varphi_i^k \cdot z^k\right) \cdot e_i$ alors :

$$O(f)(\varphi) = P_V\left(z \mapsto \sum_{i,l,c} f_{l,c}(z)\cdot\varphi_c(z)\cdot e_l\right) = \sum_{i,l,c} P\left(z \mapsto \sum_{k=0}^{N+m}\sum_{a+b=k} f_{l,c}^a\cdot\varphi_c^b\cdot z^k\right)\cdot e_l$$

$$= \sum_{i,l,c} P\left(\mapsto s\sum_{k=0}^{N+m}\sum_{a+b=k} f_{l,c}^a\cdot\varphi_c^b\cdot z^k\right)\cdot e_l = \left(z \mapsto \sum_{i,l,c} f_{l,c}(z)\cdot\varphi_c(z)\cdot e_l\right) = f\circ\varphi$$

Alors si f est comme en haut et $g_{l,c}(z) = \sum_{k=-n}^{n} g_{lc}^k \cdot z^k$ et que φ est comme ci-haut, i.e. f et g sont de degrés entre $-n$ et n, φ est de degré plus grand que $2\cdot n$ alors on a $O(g)(\varphi) = g\circ\varphi$ qui est de degré au moins n et donc que $O(f)(O(g)(\varphi)) = f\circ g\circ\varphi$. D'autre part $f\circ g$ est de degrés entre $-2\cdot n$ et $2\cdot n$ donc $O(f\circ g)(\varphi) = f\circ g\circ\varphi$. Ainsi $O(f\circ g) - O(f)\circ O(g) = 0$ sauf sur un espace de dimension finie. Appelons $\bar{O}$ la composition de O avec la projection $\mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{Q}$, alors $\bar{O}(f\circ g) - \bar{O}(f)\circ\bar{O}(g) = 0$ d'où $\bar{O}$ est un morphisme du sous-groupe de s$C^0(\mathbb{S}^1, GL(V))$, muni de la multiplication, fait des fonctions de degrés finis dans Q avec la composition. Ce sous-groupe étant dense dans $C^0(\mathbb{S}^1, GL(V))$, $\bar{O}$ est un morphisme global.

Mais alors, pour chaque $f \in C^0(\mathbb{S}^1, GL(V))$, $\bar{O}(f)$ est inversible (son inverse est $\bar{O}(z \mapsto f^{-1}(z))$. D'où $O(f)$ est inversible modulo les compacts, i.e. il est Fredholm.
La continuité de $O(f)$ et la dépendance continue de $O(f)$ en fonction de f sont claires puisque l'on a encore $||O(f)|| = \sup ||f(z)||_{GL(V)}$.

Ϫ

Variation de l'espace : Supposons que $X \in \mathsf{TopCH}$ et E soit un fibré sur X. On appelle $H(E)$ l'espace $\cup_{x\in X}\{x\}\times H(E_x)$ et $H_0(E) = \cup_{x\in X}\{x\}\times H_0(E_x)$. Les trivialisations sur E induisent un ensemble de trivialisations sur $H(E)$ et $H_0(E)$, puisque tout automorphisme de E_x induit un automorphisme bi-lipschitz de $H(E_x)$ et de $H_0(E)$, les changements de trivialisations sont bi-lipschitz, on peut donc dire que $H(E)$ est un fibré sur X à fibre $H(E_x)$ (topologisé comme précédemment comme un espace de Hilbert pour une métrique sur E_x), et, de même $H_0(E)$ est un fibré sur X de fibre $H_0(E_x)$, l'espace de Hilbert.
Cette construction de fibrés s'étend en une construction d'un fibré $\mathsf{F}(H_0(E)) = \cup_{x\in X}\mathsf{F}(H_0(X))$ où la topologie de la fibre est donné par la norme opérateur.
Toutes ces topologies ne dépendent pas du produit scalaire choisi, encore une fois.

Wiener-Hopf Varié

Soit $f\colon \mathbb{S}^1\times X \xrightarrow[X]{} GL(E)$ un morphisme de fibré, il induit une section d'opérateurs Wiener-Hopf notée $\omega(E,f)\colon X \xrightarrow[X]{} \mathsf{F}(H_0(E))$ définie par :

$$\omega(E,f)\colon \varphi\in H_0(E_x) \longmapsto P_{E_x}\left(z\mapsto f(z,x)\circ\varphi(z)\right)$$

DEMO Par une trivialisation, $\omega(E,f)|_{H_0(E_x)}$ n'est rien d'autre que $O_{E_x}(z \longmapsto f(z,x)$, donc $\omega(E,f)$ dépend continûment de f et est Fredholm.

Ϫ

Indice avec un grand I : Soit $F \in \Gamma(\mathsf{F}(H_0(E)))$. Puisque $H_0(E)$ est un fibré d'espaces de Hilbert, de dimension infinie, il est trivialisable (grâce au théorème de Kuiper). Soit $\eta\colon H_0(E) \xrightarrow[X]{} X\times H_0$ une trivialisation, alors l'application $G\colon x\mapsto \eta_x\circ F_x\circ\eta_x^{-1}$ est une famille continue de Fredholm de H_0. L'étude de ces familles que nous avons fait au chapitre précédent, nous montre l'existence d'un sous-espace V de codimension finie de H_0 tel que $V \cap \ker G_x = \{0\}$ pour chaque x. Alors $W = \cup_{x\in X}\eta_x^{-1}(V)$ est un sous-fibré de $H_0(E)$ de codimension finie tel que $W_x \cap \ker F_x = \{0\}$, on appellera de tels sous-fibrés de $H_0(E)$, un *bon* sous-fibré pour F. Donc F est injective sur W d'où $F(W)$ est encore un sous-fibré de $H_0(E)$. On peut alors définir *l'Indice* (avec un grand I) de F :

$$\underline{\mathrm{Ind}\ (F)} = \left[H_0(E)/W\right] - \left[H_0(E)/F(W)\right] \in K(X)$$

Notons que cet indice correspond à l'indice de notre famille continue G de Fredholms dans $H_0(E)$. En effet, η_x envoye W_x sur $\{x\} \times V$ et $F_x(W_x)$ sur $G_x(W_x)$ donc $H_0(E)/W \cong X \times H_0/V$ et $H_0(E)/F(W) \cong H_0/G(V)$. La preuve que l'Indice ne dépend pas de W se fait de manière très similaire à l'ancienne preuve : supposons que W' soit un autre bon sous-fibré de $H_0(E)$, alors $W' \cap W$ en est encore, nous pouvons donc supposer que $W' \subset W$. On a alors les suites exactes :

$$0 \longrightarrow W/W' \hookrightarrow H_0(E)/W' \twoheadrightarrow H_0(E)/W \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow W/W' \xhookrightarrow{F} H_0(E)/F(W') \twoheadrightarrow H_0(E)/F(W) \longrightarrow 0$$

D'où : $\mathrm{Ind}\ (F, W') = [H_0(E)/W'] - [H_0(E)/F(W)] = [H_0(E)/W \oplus W/W'] - [H_0(E)/F(W) \oplus W/W'] = \mathrm{Ind}\ (F, W)$.

Par pur délice formel, on conclut que les deux indices que nous avons définis commutent et donc que la classe d'homotopie de la famille continue de Fredholm obtenue par conjugaison par η ne dépend pas de η.
Cela montre également que l'Indice avec un grand I est un morphisme du semi-groupe $\Gamma(\mathsf{F}(H_0(E)))$ muni de la composition point par point dans le groupe $K(X)$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathsf{F}(H_0(E))) & \xrightarrow{\eta\circ\cdot\circ\eta^{-1}} & [X, \mathsf{F}(H_0)] \\ & \searrow^{\mathrm{Ind}} & \big\downarrow \sim \mathrm{ind} \\ & & K(X) \end{array}$$

Morphisme

Soient (E, f) et (D, g) deux paires de collages sur $X \in \mathsf{TopCH}$, alors $(E, f) \oplus (D, g) := (E \oplus D, f \oplus g) \in PC(X)$, nous montrons :

$$\mathrm{Ind} \circ \omega(E, f) \oplus \mathrm{Ind} \circ \omega(D, g) = \mathrm{Ind} \circ \omega((E, f) \oplus (D, g))$$

DEMO AVIS : Notre démonstration est pédestre, ceux qui y croient peuvent la sauter.

Soit V un bon sous-fibré pour $F := \omega(E, f)$ et W un bon sous-fibré pour $G := \omega(D, g)$. Appelons encore $L := \omega(E \oplus D, f \oplus g)$. Choisissons $x \in X$, $< e_i >$ une base de E_x, $< d_j >$ une base de F_x. Pour $x \in X$ et $\varphi \in H_0(D_x \oplus E_x)$ avec $\varphi(z) = \alpha(z) \oplus \beta(z)$, on développe :

$$\alpha(z) = \textstyle\sum_i \alpha_i(z) \cdot e_i \quad \beta(z) = \sum_i \beta_i(z) \cdot d_i \quad f(z,x)(e_c) = \sum_l f_{l,c} \cdot e_l \quad g(z,x)(d_c) = \sum_l g_{l,c} \cdot d_l$$

Nous pouvons alors calculer :

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= P_{E_x \oplus D_x}(z \mapsto f(z) \oplus g(z) \circ \alpha(z) \oplus \beta(z)) \\ &= P_{E_x \oplus D_x}(z \mapsto f(z,x) \circ \alpha(z) \oplus 0) + P_{E_x \oplus D_x}(z \mapsto 0 \oplus g(z,x) \circ \beta(z)) \\ &= \textstyle\sum_{i,l} P(z \mapsto f_{l,i}(z) \cdot \alpha_i(z)) \cdot e_l \oplus 0 + \sum_{j,l} P(z \mapsto g_{l,j} \cdot \beta_j(z)) \cdot 0 \oplus d_l \\ &= (z \mapsto F(\alpha)(z) \oplus 0) + (z \mapsto 0 \oplus G(\beta)(z)) = (z \mapsto F(\alpha) \oplus G(\beta)) \end{aligned}$$

Mais si $\varphi(z) = \alpha(z) \oplus \beta(z)$ avec $\alpha \in V_x$ et $\beta \in W_x$ alors $L(\varphi) = 0$ implique $F(\alpha) = 0$ et $G(\beta) = 0$ donc $\alpha = 0$ et $\beta \in 0$. Donc $U_x = \{\varphi \in H_0(E_x \oplus D_x) \mid \varphi(z) = \alpha(z) \oplus \beta(z) \text{ et } \alpha \in V_x,\ \beta \in W_x\}$ est un bon sous-espace pour F_x et $U = \cup_{x\in X} U_x$ est donc un bon sous-fibré (c'est un fibré puisqu'il est isomorphe à $V \oplus W$).

Calculons alors l'indice de L, en servant de l'isomorphisme η : $H_0(E \oplus D) \longrightarrow H_0(E) \oplus H_0(D)$, $\eta(\varphi) = \alpha \oplus \beta$ si $\varphi(z) = \alpha(z) \oplus \beta(z)$; nous avons démontré par notre calcul, que $\eta \circ L \circ \eta^{-1} = F \oplus G$, ainsi :

$$\begin{aligned}\text{Ind } L &= \left[H_0(E\oplus D)/_U\right] - \left[H_0(E\oplus D)/_{L(U)}\right]\\ &\overset{\eta}{=} \left[H_0(E)\oplus H_0(D)/_{V\oplus W}\right] - \left[H_0(E)\oplus H_0(D)/_{F(V)\oplus G(W)}\right]\\ &= \left[H_0(E)/_V\right]\oplus\left[H_0(D)/_W\right] - \left[H_0(E)/_{F(V)}\right]\oplus\left[H_0(D)/_{G(W)}\right] = \text{Ind } F + \text{Ind } G\end{aligned}$$

Vect(X)-module : Munissons $PC(X)$ d'une action du semi-anneau Vect X : Si $D \in$ Vect X et $(E,f)\in PC(X)$ alors on définit :

$$D\cdot(E,f) = (D\otimes E, Id\otimes f)\in PC(X)$$

Nous laissons au lecteur le loisir de prouver que cette action est bien une action de semi-anneau sur un semi-anneau.

Notez que $PC(X)$ est déjà un semi-anneau, donc il est clairement un $PC(X)$-module, mais nous ne serons pas capables de montrer que Ind$\circ\omega$ est un morphisme de semi-anneau ; c'est la restriction de la mutliplication aux paires (D, Id) qu'il nous faut.

Vect(X)-morphisme

Soit $(E,f)\in PC(X)$ et $D\in$ Vect X alors :

$$\text{Ind}\circ\omega((D\cdot(E,f)) = D\otimes\text{Ind}\circ\omega(E,f)$$

Autrement dit Ind$\circ\,\omega$ est un morphisme de Vect X-module.

DEMO Appelons $L=\omega(D\cdot(E,f))\colon X \xrightarrow[X]{} \mathsf{F}(H_0(D\otimes E))$ et $F=\omega(E,f)\colon X\xrightarrow[X]{}\mathsf{F}(H_0(E))$. Fixons $x\in X$, $<e_i>$ une base de E_x, $<d_j>$ une base de D_x, exprimons $f(z,x)(e_c)=\sum_l f_{l,c}(z,x)\cdot e_l$ et prenons $\varphi(z)=\sum_{j,i}\varphi_{j,i}\cdot d_j\otimes e_i$, on pose $\varphi_j(z)=\sum_i\varphi_{j,i}(z)\cdot e_i$. Observons alors le phénomène pédestre suivant :

$$\begin{aligned}L(\varphi)(y) &= P_{D_x\otimes E_x}\left(z\mapsto\sum_{j,i} Id\otimes f(z,x)\varphi_{j,i}(z)\cdot d_j\otimes e_i\right)(y) = P_{D_x\otimes E_x}\left(z\mapsto\sum_{j,i,l}\varphi_{j,i}(z)\cdot f_{i,l}(z,x)\cdot d_j\otimes e_l\right)(y)\\ &= \sum_{j,i,l} P\left(z\mapsto\varphi_{j,i}(z)\cdot f_{i,l}(z,x)\right)(y)\cdot d_j\otimes e_i = \sum_j d_j\otimes\left(\sum_{i,l}P\left(z\mapsto\varphi_{j,i}(z)\cdot f_{i,l}(z,x)\right)(y)\cdot e_l\right)\\ &= \sum_j d_j\otimes\left(P_{E_x}\left(z\mapsto\sum_i\varphi_{j,i}(z)\cdot\sum_l f_{i,l}(z,x)\cdot e_l\right)(y)\right) = \sum_j d_j\otimes\left(P_{E_x}\left(z\mapsto\sum_i\varphi_{j,i}(z)\cdot f(z,x)(e_i)\right)(y)\right)\\ &= \sum_j d_j\otimes\left(P_{E_x}\left(z\mapsto f(z,x)\circ\varphi_j(z)\right)(y)\right) = \sum_j d_j\otimes F(\varphi_j)(y)\end{aligned}$$

Maintenant, soit V un bon sous-fibré pour F. Si tous les $\varphi_j\in V_x$ on a la nullité de $L(z\mapsto\sum_j d_j\otimes\varphi_j(z))=\sum_j d_j\otimes F(\varphi_j)$ si et seulement si tous les $F(\varphi_j)$ sont nuls ce qui implique que les φ_j sont tous nuls et donc que $\sum_j d_j\otimes\varphi_j=0$. Alors le sous-espace

$$W_x=\left\{\sum_j d_j\otimes\varphi_j\in H_0(D_x\otimes E_x)\,|\,\varphi_j\in V\right\}$$

est un bon sous-espace. On appelle alors $W=\cup_{x\in X}W_x$.

Il nous faut montrer que W est un sous-fibré et qu'il est de codimension finie. Pour cela, observons l'isomorphisme $\eta\colon H_0(D\otimes E)\xrightarrow{\sim}H_0\otimes E\otimes D$ défini par $\eta(\sum_{j,i}\varphi_{j,i}\cdot d_j\otimes e_i)=\sum_{j,i}\varphi_{j,i}\otimes e_i\otimes d_j$ (attention, permutation...). Posons $G=\eta\circ L\circ\eta^{-1}$ et $Z=\eta(W)$. Mais si $\mu\colon H_0(E)\xrightarrow{\sim}H_0\otimes E$ est un ismorphisme comme celui-ci haut alors notre petit calcul nous a montré que :

$$G\left(\sum_{j,i}\varphi_{j,i}\otimes e_i\otimes d_j\right)=\eta\circ L\left(z\mapsto\sum_{j,i}\varphi_{j,i}(z)\cdot d_j\otimes e_i\right)=\eta\left(\sum_{j,i}z\mapsto d_j\otimes F(\varphi_{j,i}\cdot e_i)(z)\right)$$
$$=\sum_{j,i}\eta\left(z\mapsto d_j\otimes F\circ\mu^{-1}\left(\varphi_{j,i}\otimes e_i\right)(z)\right)=\sum_j\left(\mu\circ F\circ\mu^{-1}\left(\sum_i\varphi_{j,i}\otimes e_i\right)\right)\otimes d_j$$
$$=(\mu\circ F\circ\mu^{-1})\otimes Id_D\left(\sum_{j,i}\varphi_{j,i}\otimes e_i\otimes d_j\right)$$

Donc $\eta\circ L\circ\eta^{-1}=(\mu\circ F\circ\mu^{-1})\otimes Id_D$. Or $Z_x=\eta_x(W_x)=\mu_x(V_x)\otimes D_x$ donc Z est bien un sous-fibré de codimension finie de $H_0\otimes E\otimes D$ d'où W en est un également, de plus $G_x(Z_x)=(\mu_x\circ F_x\circ\mu_x^{-1})\otimes Id_D(\mu_x(V_x)\otimes D_x)=(\mu_x\circ F_x(V_x))\otimes D_x$. Nos isomorphismes nous permettent maintenant de calculer l'indice de F:

$$\mathrm{Ind}\circ\omega(E,f)=\mathrm{Ind}\ F=\left[H_0(D\otimes E)/_W\right]-\left[H_0(D\otimes E)/_{F(W)}\right]$$
$$\overset{\eta}{=}\left[H_0\otimes E\otimes D/_Z\right]-\left[H_0\otimes E\otimes D/_{G(z)}\right]=\left[H_0\otimes E\otimes D/_{\mu(V)\otimes D}\right]-\left[H_0\otimes E\otimes D/_{\mu\circ F(V)\otimes D}\right]$$
$$=\left[H_0\otimes E/_{\mu(V)}\right]\otimes D-\left[H_0\otimes E/_{\mu\circ F(V)}\right]\otimes D\overset{\mu}{=}\left(\left[H_0(E)/_V\right]-\left[H_0(E)/_{F(V)}\right]\right)\otimes D$$
$$=\mathrm{Ind}\circ\omega(E,f)\otimes D$$

D'où le résultat.

DÉFINITION : Nous pouvons maintenant poser pour tout $X\in\mathit{TopCH}$: $\alpha_X\colon \mathrm{Vect}\ \mathbb{S}^2\times X\longrightarrow K(X)$ comme $\alpha_X=\mathrm{Ind}\circ\omega\circ\delta$, autrement dit, nous passons à travers les étapes suivantes:

$$E\in\mathrm{Vect}\ (\mathbb{S}^2\times X)\longmapsto(E|_{0\times X},f)\in PC(X)\longmapsto F\in\Gamma(\mathcal{F}(H_0(E|_{0\times X})))\longmapsto\mathrm{Ind}\ F\in K(X)$$

Nous avons montré que δ était un morphisme additif de même que $\mathrm{Ind}\circ\omega$, ainsi α_X est un morphisme additif. Mais alos α_X est un morphisme de semi-groupe, il s'étend donc de manière unique en un morphisme de groupe $K(\mathbb{S}^2\times X)\longrightarrow K(X)$.
Nous avons vu que δ était un morphisme multiplicatif c'est donc un morphisme de Vect X-module si l'on définit l'action de Vect X comme $E\cdot F=\pi^*E\otimes F$ pour $E\in\mathrm{Vect}\ X$, $F\in\mathrm{Vect}\ \mathbb{S}^2\times X$ et $\pi\colon\mathbb{S}^2\times X\longrightarrow X$ est la projection. δ est alors clairement un morphisme de Vect X-module (puisque l'application de collage d'un rappel par π est l'identité. On a montré que $\mathrm{Ind}\circ\omega$ était un morphisme de module, ainsi α_X est un morphisme de module.

Naturalité

Le morphisme α_X est naturel au sens suivant: si $f\colon Y\longrightarrow X$ est une application continue on a $\alpha_X\circ(Id_{\mathbb{S}^2}\times f)^*=f^*\circ\alpha_Y$.

$$\begin{tikzcd} K(\mathbb{S}^2\times X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "(Id\times f)^*"'] & K(X) \arrow[d, "f^*"] \\ K(\mathbb{S}^2\times Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & K(Y) \end{tikzcd}$$

DEMO Nous prouvons la naturalité à chaque étape: celle de δ, de ω et de Ind .

1. Soit E un fibré sur $\mathbb{S}^2\times X$ alors $f^*E|_{0\times Y}=f^*(E|_{0\times X})=f^*V$. Rappelons une propriété du collage de fibrés: si D et C sont des fibrés sur U_1 et U_2 alors $f^*(D\cup_g C)\cong f^*C\cup_{g_f}f^*D$ où $g_f\colon f^*D|_{V_1\cap V_2}\longrightarrow f^*C|_{V_1\cap V_2}$ est $g_f\colon(v,d)\in f^*D_v=D_{f(v)}\longmapsto g(d)\in C_{f(v)}=f^*C_v$.
Nous nous permettrons donc de définir le morphisme induit entre deux paires de collages comme:

$$f^*(V,g)=(f^*V,g_f)\text{ avec }g_f\colon(z,y,v)\in B_0\times f^*V_{z,y)}=B_0\times V_{f(y)}\longmapsto(z,y,g(v))\in B_\infty\times V_{z,f(y)}$$

Alors notre application δ va bien commuter avec les morphismes induits. Il va de soi que ces définitions passent à PC_H et que cela définit bien un morphisme par rapport à la somme directe.

2. Prenons toujours $f\colon Y\longrightarrow X$ et (V,g) et (V,g) une paire de collage alors:

$$\begin{aligned}\omega(f^*(V,g))_y \colon H_0(f^*V_y) = H_0(V_{f(y)}) &\longrightarrow H_0(f^*V_y)\\ \varphi &\longmapsto P_{V_{f(y)}}(z \mapsto g_f(z,y)\cdot\varphi(z)) = P_{V_{f(y)}}(z \mapsto g(z,f(y)\cdot\varphi(z))\end{aligned}$$

Donc $\omega(f^*(V,g))_y = \omega(V,g)_{f(y)}$ d'où la naturalité de ω.

3. Enfin, si $F \in \mathit{\Gamma}\mathsf{F}H_0(V)$, alors $V \in \text{Vect } X$ et $f\colon Y \longrightarrow X$ alors $F\circ f \in \mathit{\Gamma}\mathsf{F}H_0(f^*V)$ et si W est un bon sous-fibré pour F alors f^*W est clairement un bon sous-fibré pour $F\circ f$, on a :

$$\text{Ind }(F\circ f) = \left[H_0(f^*V)/_{f^*W}\right] - \left[H_0(f^*V)/_{F\circ f(f^*W)}\right]$$

or $F\circ f(f^*W)_y = F_{f(y)}(W_{f(y)} = f^*F(W)$ donc $\text{Ind }(F\circ f) = [H_0(V)/W] - [H_0V/F(W)] = f^*\text{Ind } F$.

On a donc prouvé la naturalité de $\alpha_X\colon \text{Vect } \mathbb{S}^2\times X \longrightarrow K(X)$ qui s'induit donc en une application naturelle $\alpha_X\colon K(\mathbb{S}^2\times X) \longrightarrow K(X)$.

$$\begin{tikzcd} K(\mathbb{S}^2\times X^+) \arrow[r, "\alpha_{X^+}"] \arrow[d, "i^*_{\mathbb{S}^2}"] & K(X^+) \arrow[d, "i^*_X"] \\ K(\mathbb{S}^2) \arrow[r, "\alpha_X"] & K(\{+\}) \end{tikzcd}$$

Corollaire à support compact On se rappelle que si X est localement compact, $K(X) = K(X^+,+) = \ker i^*$ où $i\colon \{+\} \longrightarrow X^+$ est l'inclusion, et $q^*\oplus i^*_X \oplus i^*_Y\colon K(X^+\times Y^+,(+,+)) \longrightarrow K(X\times Y^+,+)\times K(X^+,+)\times K(Y^+)$ était un isomorphisme si $i_X\colon X^+ \longrightarrow X^+\times\{+\} \subset X^+\times Y^+$ est l'inclusion et de même $i_Y\colon Y^+ \longrightarrow \{+\}\times Y^+ \subset X^+\times Y^+$, et q était... compliquée.
Si $\xi \in K(X\times Y^+,+)$, on a donc $\rho^{-1}(\xi) \in K(X^+\times Y^+,(+,+))$ et $i^*_X(\rho^{-1}(\xi)) = 0$ et $i^*_Y(\rho^{-1}(\xi)) = 0$. La naturalité que nous venons de prouver nous amène le diagramme commutatif ci-contre pour l'application $i\colon \{+\} \longrightarrow X^+$.
Alors si $\xi \in K(\mathbb{R}^2\times X)$, on a $i^*_+\circ\alpha_{X^+}(\rho^{-1}(\xi)) = \alpha_+\circ i_{\mathbb{R}^2}(\rho^{-1}(\xi)) = 0$ d'où $\alpha_{X^+}(\rho^{-1}(\xi)) \in K(X^+,+) = K(X)$.

Nous nous permettrons l'abus de langage qui consiste à voir α_X défini sur $K(\mathbb{R}^2\times X)$ via l'inclusion de $K(\mathbb{R}^2\times X^+,+)$ dans $K(\mathbb{S}^2\times X^+,(\infty,+))$ donnée par ρ^{-1} ; nous avons prouvé que l'image de cette restriction est dans $K(X)$. C'est là le morphisme α_X que nous allons utiliser.

Propriété Multiplicative

Pour tout espace X localement compact, on a que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} K(\mathbb{R}^2\times X)\otimes K(Y) \arrow[r, "\boxtimes"] \arrow[d, "\alpha_X\otimes Id"] & K(\mathbb{R}^2\times X\times Y) \arrow[d, "\alpha_{X\times Y}"] \\ K(X)\otimes K(Y) \arrow[r, "\boxtimes"] & K(X\times Y) \end{tikzcd}$$

DEMO Observons d'abord que chacune des flèches de ce diagramme est un $K(Y)$-morphisme ainsi que nous l'avons montré. Prenons donc $\xi \in K(X)$ et $\upsilon \in K(Y)$, nous voulons montrer que $\alpha_X(\xi)\boxtimes\upsilon = \alpha_{X\times Y}(\xi\boxtimes\upsilon)$. Puisque $K(Y)$-morphisme, nous pouvons supposer que $\upsilon = [1]$. Si l'on nomme $\pi\colon X\times Y \longrightarrow X$ la projection canonique, on a $\xi\boxtimes[1] = (Id\times\pi)^*\xi \in \text{Vect }(\mathbb{R}^2\times X\times Y)$. La naturalité de α nous fournit alors $\pi^*\circ\alpha_{X\times Y} = \alpha_X\circ(Id\times\pi^*)$ d'où :

$$\alpha_{X\times Y}(\xi\boxtimes\upsilon) = \alpha_{X\times Y}(Id\times\pi)^*\xi) = \pi^*\circ\alpha_X(\xi) = \alpha_X(\xi)\boxtimes[1] = \alpha_X(\xi)\boxtimes\upsilon$$

Flash publicitaire

Étant donné un fibré en droite E sur X, l'application $\varphi\colon\ E^*\otimes E \longrightarrow X\times\mathbb{C}$, qui envoye $(\varepsilon\otimes v)_x \longmapsto (x,\varphi(v))$, est un morphisme de fibré surjectif donc injectif, donc c'est un isomorphisme de fibré. Ainsi tout fibré en droites admet un inverse multiplicatif, son dual.

DÉFINITION : Soit E_m le fibré en droite sur $\mathbb{S}^2$ donné par $B_0\times\mathbb{C}\cup_{f_m} B_\infty\times\mathbb{C}$ où $f_m(\theta,z)\mapsto(\theta,\theta^m\cdot z)$. On pose alors: $\underline{b} = [E_{-1}]-[E_0]\in K(\mathbb{S}^2)$ et l'on appelle cet élément *la classe de Bott*. On observe que sa dimension est nulle et donc que $b\in K(\mathbb{R}^2)=K(\mathbb{S}^2,\infty)$.
Calculons maintenant l'image de b par $\alpha.$ où $\cdot$ est l'espace à un point. $\delta(E_{-1})=(\cdot\times\mathbb{C},f_{-1})$ donc l'indice de $\omega\circ\delta(E_{-1})$ est 1; d'autre part l'indice de $\omega\circ\delta(E_0)$ est nul, d'où $\alpha.(b)=1$.

Théorème de Périodicité

Soit $\alpha_X\colon\ K(\mathbb{R}^2\times X)\longrightarrow K(X)$ un morphisme de $K(X)$-module pour tout X qui soit naturel en X et qui satisfasse à la propriété multiplicative tel que $\alpha.(b)=1$, alors α_X est un ismorphisme dont l'inverse est fourni par le produit carré avec la classe de Bott.

`DEMO` Appelons $\beta\colon\ K(X)\longrightarrow K(\mathbb{R}^2\times X)$ le produit carré par la classe de Bott.
$\underline{\alpha\circ\beta = Id}$: On utilise directement la propriété multiplicative pour $\cdot$ et X.

$$\alpha_X\circ\beta(\xi)=\alpha_X(b\boxtimes\xi)=\alpha_X(b)\boxtimes\xi=\xi$$

$\underline{\beta\circ\alpha=Id}$ Soit $\zeta\in K(\mathbb{R}^2\times X)$, nous voulons montrer que $\beta\circ\alpha(\zeta)=b\boxtimes\alpha_X(\zeta)=\zeta$. Si l'on appelle $\rho\colon\ \mathbb{R}^2\times X\longrightarrow X\times\mathbb{R}^2$ l'application d'échange, cela revient à montrer $\alpha(\zeta)\boxtimes b=\rho^*(\zeta)=:\upsilon$. Appliquons la propriété multiplicative pour $\mathbb{R}^2$ et X, on obtient que $\alpha_X(\zeta)\boxtimes b=\alpha_{X\times\mathbb{R}^2}(\zeta\boxtimes b)$.
Nommons alors τ l'application $\mathbb{R}^2\times X\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\times X\times\mathbb{R}^2$ par $(a,x,c)\mapsto(c,x,a)$ qui est proprement homotope à l'identité. Alors τ^* est l'identité sur $K(\mathbb{R}^2\times X\times\mathbb{R}^2)$ mais $\tau^*(\zeta\boxtimes b)=b\boxtimes\rho^*(\zeta)$ d'où:

$$\alpha(\zeta)\boxtimes b=\alpha(\zeta\boxtimes b)=\alpha(\tau^*(\zeta\boxtimes b))=\alpha(b\boxtimes\rho^*(\zeta))=\alpha\circ\beta(\rho^*(\zeta)=\rho^*(\zeta)$$

Ce qui, par notre première remarque, prouve le théorème de Bott.

Bibliographie

- Atiyah Michael Francis, *K-theory*, Addison-Wesley, 1989.
- Atiyah Michael Francis, *Algebraic Topology and Operators in Hilbert Space*, Quartely Journal of Oxford, 1969 ou Collected Works, N^o 3, pp. 686-704.
- Dupont Johann, *K-theory, Lectures, fall 1968* , Aarhus Universiteit, 1968.
- Booss, Bernhelm & Bleecker, David, *Topology and Analysis...*, Universitext, Springer, 1985

Au chapitre des commentaires quant à ces ouvrages: le livre de Booss & Bleecker est un excellent guide mais contient beaucoup trop peu de preuves; le livre d'Atiyah, K-theory, est très recommendable; Dupont le fait encore mieux (c'est la copie en plus détaillé !); un conseil du livre d'Atiyah m'a mené à présenter la preuve du Théorème de Bott issue de son article, celle-ci m'a paru particulièrement laconique, j'ai tenté de refaire correctement ses "évidences".