Groupes hyperboliques

Une petite visite

En 1988, Mikhaîl Gromov a présenté un exposé définissant une généralisation des groupes libres. Il a utilisé des notions métriques en faisant un lien assez fort avec les variétés. Quelques années et des multitudes de travaux plus tard il s'avère qu'il s'agit d'une bonne généralisation aux multiples propriétés. Nous voulons définir ici ces groupes, par plusieurs définitions, puis arriver à une propriété essentielle à savoir que tout groupe hyperbolique finiment engendré est finiment présenté.

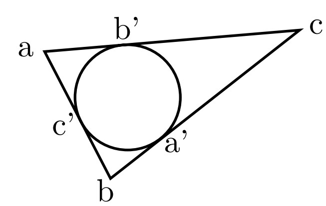
Définition : Soit X un ensemble, on appelle *métrique sur X* toute application $d\colon X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les trois propriétés suivantes.

- *séparabilité* $\forall\ x,y\in X \quad d(x,y)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=y$
- *inégalité triangulaire* $\forall\ x,y,z\in X \quad d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$
- *symétrie* $\forall\ x,y\in X \quad d(x,y)=d(y,x)$

De ces deux conditions on tire tout de suite que, $\forall\ x,y\in X$, on a $d(x,y)+d(y,x)\geq d(x,x)=0$ et donc $d(x,y)\geq 0$. De l'inégalité triangulaire, on va tirer en fait toute notre théorie.
Un ensemble X muni d'une métrique, sera appelé un *espace métrique*

Définition : Soit X un espace métrique. On définit le *produit de Gromov* comme l'application $(\bullet,\bullet)_\bullet\colon X\times X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall\ x,y,o\in X \quad (x,y)_o=\tfrac{1}{2}\cdot(d(x,o)+d(o,y)-d(x,y)$$
Par l'inégalité triangulaire, on obtient, $\forall\ x,y,o\in X$, que $(x,y)_o=\frac{1}{2}\cdot(d(x,o)+d(o,y)-d(x,y)\geq\frac{1}{2}\cdot(d(x,y)-d(x,y))=0$. On voit à l'oeil que le produit de Gromov est symétrique.

Remarque : Cette définition est à interpréter comme le "défaut d'inégalité triangulaire". C'étaot exactement la bonne quantité à considérer comme nous allons le voir. Gromov a vu très juste !
Voyons tout de suite un sens passablement géométrique à cette définiton. Soient x, y et z trois points d'un espace métrique X et soit un *triangle de comparaison* de ce triplet dans le plan euclidien ; c'est-à-dire un triangle $[a,b,c]$ dans ce plan tel que $d(a,b)=d(x,y)$, $d(b,c)=d(y,z)$ et $d(a,c)=d(x,z)$ (on note que cela est toujours possible puisque pour tout triplet de réels positifs tels que chacun soit plus petit que la somme des deux autres est réalisé comme les longueurs des côtés d'un triangle euclidien, il suffit de tracer des cercles). Soit C le cercle inscrit dans le triangle $[a,b,c]$ alors, en nommant a' l'intersection de la bissectrice partant a avec $[b,c]$ et, de même, b. et c' :



$$\begin{aligned} & d(a,b')=d(a,c')=(a,c)_b=(x,z)_y \\ \text{et}\quad & d(b,a')=d(b,c')=(a,c)_b=(x,z)_y \\ \text{et}\quad & d(c,a')=d(c,b')=(a,b)_c=(x,y)_z \end{aligned}$$
Ceci se voit de manière très simple en résolvant un système d'équation linéaires :
$$\begin{cases} d(a,c')+d(c',b) &= d(a,b) \\ d(a,b')+d(b'c) &= d(a,c) \\ d(c,a')+d(a',b) &= d(b,c) \end{cases} \overset{\text{définition des}}{\underset{\text{bissectrices}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} d(a,b')+d(b,a') & & =d(a,b) \\ d(a,b') & +d(c,a') & =d(a,c) \\ \quad d(b,a') & +d(c,a') & =d(b,c) \end{cases}$$
Qui nous donne :
$$\begin{cases} 2\cdot d(a,b') = d(a,b)+d(b,c)-d(a,c) = 2\cdot(a,c)_b & \scriptstyle (1)-(3)+(2) \\ 2\cdot d(c,a') = d(a,c)+d(c,b)-d(a,b) = 2\cdot(a,b)_c & \scriptstyle (2)-(1)+(3) \\ 2\cdot d(b,a') = d(c,b)+d(b,a)-d(a,c) = 2\cdot(c,a)_b & \scriptstyle (3)-(2)+(1) \end{cases}$$

Définition : On dit qu'un espace métrique X est *δ-hyperbolique* si pour tout x, y z et $o\in X$, on a :
$$(x.y)_o\geq min((x.z)_o,(y.z_o)_\delta$$
On peut montrer qu'il suffit d'avoir cette inégalité pour un seul point o quitte a augment δ, mais nous ne nous occuperons pas de ces petites technicités.

Proposition du quadrilatère Soit (X,d) un espace métrique alors X est δ-hyperbolique si et seulement si :
$\forall\ x,y,z,t \in X \quad d(x,y)+d(z,t) \leq max\{(x,z)+(y,t),\ d(x,t)+d(y,z)\}+2\cdot\delta$

DEMO En soustrayant $d(x,t)+d(y,t)+d(z,t)$, on obtient :

$$d(x,y)-d(y,t)-d(x,t) \leq max\{d(x,z)-d(x,t)-d(z,t), d(y,z)-d(y,t)-d(z,t)\}+2\cdot\delta$$

Par la définition du produit de Gromov, on obtient :

$$-2\cdot(x.y)_t \leq max\{-2\cdot(x.z)_t, -2\cdot(y,z)_t\}+2\cdot\delta$$

Ce qui devient la définition d'hyperbolicité : $(x.y)_t \geq min\{(x.z)_t,(y.z)_t\}-\delta$

Exemples

Tout espace métrique borné de diamètre δ est δ-hyperbolique puisque pour chaque $x,y,o \in X$, on voit que $(x.y)_o \leq \frac{1}{2}(d(x,o)+d(y,o)) \leq \frac{1}{2}(\delta+\delta) \leq \delta$, la définition d'hyperbolicité en découle.

La droite réelle est 0-hyperbolique : en effet, dans celle-ci $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y|$. Montrons que cette grandeur n'est rien d'autre que la distance de o à l'intervalle $[x,y]$:
si $o \leq y \leq x$ alors $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y| = (x-o)+(y-o)-(x-y) = 2\cdot y - 2\cdot o$
si $o \leq x \leq y$ alors $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y| = (x-o)+(y-o)-(y-x) = 2\cdot x - 2\cdot o$
si $y \leq o \leq x$ alors $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y| = 0$
si $x \leq o \leq y$ alors $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y| = 0$
si $y \leq x \leq o$ alors $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y| = (o-x)+(o-y)-(x-y) = -2\cdot x + 2\cdot o$
si $x \leq y \leq o$ alors $2\cdot(x.y)_o = |x-o|+|y-o|-|x-y| = (o-x)+(o-y)-(y-x) = -2\cdot y + 2\cdot o$

On montre de manière très similaire que tout arbre réel est 0-hyperbolique.

Par contre le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ n'est pas hyperbolique. Pour le voir on choisit un triangle $[a,b,c]$ quelconque et un point o dans le segment $[a,b]$. On a alors, comme pour $\mathbb{R}$ que $(a.b)_o = 0$ et que $min\{(a.c)_o,(b.c)_o\} = r$ pour un $r \in \mathbb{R}^+$. Alors en appliquant une homothétie de rapport λ et de centre o on augmente toutes ces grandeurs d'un facteur λ. Si R^2 était hyperbolique, la définition donnerait $0 \geq \lambda r - \delta$, une contradiction pour un facteur λ assez grand.

Cobornées Soit X un espace métrique et $Y \subset X$ alors on a que :
1) Si X est δ-hyperbolique alors Y est δ-hyperbolique
2) Si Y est δ-hyperbolique et que $d(x,Y) \leq \eta$ pour tout $x \in X$ alors X est δ'-hyperbolique pour $\delta' = \delta + 6\cdot\eta$

DEMO Par la définition même d'espace hyperbolique, le 1) est clair. Il reste le 2). Soient $x,y,z,o \in X$ et soient $x',y',z'o'$ des points de Y tels que $d(x,x') \leq \eta$, $d(y,y') \leq \eta, \ldots$ Remarquons que si a et $b \in X$ et que a' et $b' < Y$ avec $d(a,a') \leq \eta$ et $d(b,b') \leq \eta$ alors on a :

$$d(a,b) \leq d(a,a')+d(a',b')+d(b',b) \leq d(a',b')+2\cdot\eta$$

$$\text{et } d(a,b) \geq d(a',b')-d(a,a')-d(b,b') \geq d(a',b')-2\cdot\eta$$

Ainsi : $(x,y)_o = \frac{1}{2}\cdot(d(x,o)+d(y,o)-d(x,y)) \geq \frac{1}{2}\cdot(d(x',o')+d(y',o')-d(x',y')-3\cdot\eta = (x',y')_{o'-3\cdot\eta}$ et de même :

Contractilité Soit $\mathit{\Gamma}$ un groupe δ-hyperbolique finiment engendré alors $P_d(\mathit{\Gamma})$ contractile pour tout $d \geq 4 \cdot \delta + 1$

DEMO $P_d(X)$ est un complexe sumplicial connexe, de dimension finie et localement fini (puisque chaque boule de $\mathit{\Gamma}$ ne contient qu'un nombre fini de points. Alors il suffit de montrer que tout sous-complexe fini de $P_d(\mathit{\Gamma})$ peut-être homotopé en un point. Ce qui montrera que tous les $\pi_k(P_d(\mathit{\Gamma}))$ sont triviaux et donc (par le théorème de Whitehead) que $P_d(\mathit{\Gamma})$ est contractile.

Choisissons donc un sous-complexe fini de K et soit o le sommet de K le plus éloigné de e. Remarquons que l'on parle ici de distance dans $\mathit{\Gamma}$, aucune distance n'a été définie sur $P_d(\mathit{\Gamma})$. Séparons deux cas.

Cas premier : $d(e,o) \leq \frac{d}{2}$ Alors pour tout s et $s' \in K^{(0)}$, on a que $d(s,s') \leq d(s,e)+d(e,s') \leq d(o,e)+d(e,o)$ et donc tous les sommets de K sont inclus dans un seul et même simplexe, K est donc contractile.

Cas second : $d(e,o) > \frac{d}{2}$ Choisissons alors un sommet p de $P_d(\mathit{\Gamma})$, c'est-à-dire un élément de $\mathit{\Gamma}$ tel que $d(o,p) = \left[\frac{d}{2}\right]$ ($[\cdot]$ est la fonction partie entière, ie troncature) et tel que $d(o,e) = d(o,p) + d(p,e)$; il suffit, obtenir un tel élément de couper un mot le plus cours exprimant o. Définissons alors $f_0 \colon K^{(0)} \longrightarrow P_d(\mathit{\Gamma})^{(0)}$ qui fixe tous les sommets de K sauf o qui est envoyé sur p. Si nous arrivons à montrer que :

$$\forall \;\; s \in K^{(0)} \quad d(s,o) \leq d \quad \Longrightarrow \quad d(s,p) \leq d$$

Alors nous avons montré que f_0 s'étend en une application simpliciale f et que pour chaque simplexe σ qui touche o, les sommets de $(f(\sigma) \cup \sigma)$ sont dans un seul et même simplexe et donc que $f(K)$ est un écroulement de K. Montrons donc cette implication.

Soit s un sommet de K qui est sommet d'un même simplexe que o. Puisque $\mathit{\Gamma}$ est hyperbolique, on peut appliquer la proposition du quadrilatère qui nous donne, pour le quadrilatère (s,p,o,e) :

$$d(s,p) + d(o,e) \leq max\,\{d(s,o) + d(p,e), d(s,e) + d(p,o)\} + 2 \cdot \delta$$

En soustrayant $d(o,e)$ de chaque côté, on obtient, puisque $d(o,e) = d(o,p) + d(p,e)$:

$$\begin{aligned} d(s,p) &\leq max\,\{d(s,o) + d(p,e) - d(o,e), d(s,e) + d(p,o) - d(o,e)\} + 2 \cdot \delta \\ &\leq max\,\{d(s,o) - d(o,p), d(p,o) + d(s,e) - d(o,e)\} + 2 \cdot \delta \end{aligned}$$

Or $d(o,e) \geq d(s,e)$ puisque nous avons choisi o maximal et donc :

$$d(s,p) \leq max\left\{d - \left[\tfrac{d}{2}\right], \left[\tfrac{d}{2}\right]\right\} + 2 \cdot \delta \leq \left[\tfrac{d}{2}\right] + 1 + 2 \cdot \delta \leq d$$

Ainsi f_0 peut être étendu en un écroulement de K où l'on a rapproché un sommet de o et donc un nombre fini de telles procédures nous ramène au Cas I, où l'on obtient la contractilité de K. Le théorème est donc prouvé.

Corollaire d'action Pour tout groupe δ-hyperbolique $\mathit{\Gamma}$, il existe un complexe simplicial P et une action de $\mathit{\Gamma}$ sur P satisfaisant les propriétés suivantes :

- P est un complexe simplicial de dimension finie, localement fini et simplement connexe
- $\mathit{\Gamma}$ agit transitivement et fidèlement sur les sommets de P
- le quotient de P par $\mathit{\Gamma}$ est compact.

DEMO On prend comme complexe, le complexe de Rips $P = P_d(X)$ pour $d \geq 4 \cdot \delta + 1$. Puisque chaque boule de $\mathit{\Gamma}$ ne contient qu'un nombre fini de points, P est de dimension finie et localement fini. On a montré qu'il est contractile et donc simplement connexe. De plus $\mathit{\Gamma}$ agit isométriquement sur lui-même par multiplication à gauche. Donc $\mathit{\Gamma}$ agit sur $P_d(X)$ puisque qu'il envoie un ensemble de points à distances respectives $\leq d$ dans un tel ensemble. Les sommets de $P_d(X)$ sont les éléments de $\mathit{\Gamma}$ et donc l'action de $\mathit{\Gamma}$ est fidèle et transitive sur les sommets de P.

Reste à prouver que $P/\mathit{\Gamma}$ est compact. En appelant E la réunion des simplexes touchant e dans P et π la projection de quotient, on voit que E est une réunion finie de simplexe de dimension finie et qu'il est donc compact. Or il est clair que tout simplexe de P peut être enmené par Γ sur un simplexe touchant e donc $\pi(E) = {}^{P}\!/_{\Gamma}$ qui est image d'un compact par l'application continue π.

Théorème Soient Γ et P un groupe et un complexe simplicial satisfaisant aux conclusions du corollaire précédent alors Γ est finiment présenté.

DEMO Prenons comme point de base, un sommet de o de P. Pour tout sommet q de P on un unique élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(o) = q$. On pose S comme étant l'ensemble des éléments γ de Γ tels que $\{o, \gamma(o)\}$ est une arrête de P. Alors l'ensemble des mots sur l'alphabet S est en bijection avec l'ensemble des chemins simpliciaux non-stationnaires de P, par la correspondance :

$$(s_1, \dots s_n) \longleftrightarrow (o, s_1(o), s_1 \cdot s_2(o), \dots s_1 \cdot \dots \cdot s_n(o))$$

Pour élément $\gamma \in \Gamma$, il existe un chemin simplicial non-stationnaire de P reliant o à $\gamma(o)$, l'image par la correspondance de ce chemin fourni un mot écrivant γ. Ainsi l'ensemble S engendre Γ ; il est fini puisque P est localement fini.

Appelons R un ensemble des mots formés des bords des deux-simplexes de P touchant e. R est aussi fini. Il nous reste à montrer que tout mot sur l'alphabet S écrit l'élément neutre si et seulement si ce mot peut-être simplifié au moyen de suppressions ou d'ajout d'éléments de R. Il est clair que toute telle modification ne peut changer les extrêmités d'un chemin ainsi un mot représente l'élément trivial si et seulement son chemin correspondant aboutit à e. Montrons maintenant que tout chemin aboutissant à e est simplifiable par ajout ou suppression de triangles correspondant à des déplacés d'éléments de S. Puisque P est simplement connexe, il est clair que toute boucle peut s'écrouler par une suite de substitution de triangles, ainsi tout chemin partant de e et arrivant à e peut se simplifier par des ajouts ou suppressions de triangles, ce qui correspond à des ajouts ou suppression de relateurs dans le mot.

Donc tous les mots de R écrivent l'élément neutre de Γ, et tout tel mot s'écrit avec R.